Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Einführung u.
Wiederholung wichtiger
Grundbegriffe

M.B. Wischnewsky

24.10.2005

Kap. 0
Grundlagen zur Linearen Algebra

Einführung

Klassische Algebra

Ausgangspunkt: Lösung von algebraischen Gleichungen

Gleichungen

Auflösbarkeit von Gleichungen (Galoistheorie)

Fundamentalsatz der Algebra (Existenz von Wurzeln ganzrationaler Funktionen)

Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen (z.B. Newton-Verfahren)

Beispiel: $a_n*x^n +\ldots. +a_1x^1+a_0= 0$

Moderne Algebra

Die moderne Algebra hat sich inzwischen grundlegend gewandelt.

Aus der *Theorie der Gleichungen* ist die *Theorie der algebraischen Strukturen* geworden,

Gegenstände des Interesses sind u.a. Gruppen, Ringe, Körper, Algebren

und deren Anwendungen usw..

Lineare Algebra

Ausgangspunkt: Lösung linearer Gleichungssysteme

Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Definition 0.1: Ein *lineares Gleichungssystem* in n Unbestimmten und in m Gleichungen ist:

$$
\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Die a_j^i sind die *Koeffizienten* aus $\mathbb{R}$. Die b_j sind weitere Zahlen, auch die *Konstanten genannt*, und die x_i sind die *Unbestimmten*, bzw. die Unbekannten, die Veränderlichen.

$$
\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n &= b_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n &= b_2 \\
\mathrm{M} \qquad\qquad\qquad & \ \ \mathrm{M} \\
a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Lineare Gleichungssysteme

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems werden zusammengefasst zu einer *Matrix:*

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1^1 & a_1^2 & \ldots. & a_1^n \\
a_2^1 & a_2^2 & \ldots. & a_2^n \\
\mathrm{M} & & & \mathrm{M} \\
a_m^1 & a_m^2 & \ldots. & a_m^n
\end{pmatrix}
$$

Lineare Gleichungssysteme

$$
\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Definition 0.2 Matrixoperation:
Eine Matrix A der obigen Form wirkt auf einen Spaltenvektor x auf die folgende Weise:

$$
Ax := \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

dadurch wird eine Abbildung definiert

$$
L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \to Ax
$$

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ sind „Vektorräume“ und L_A ist eine „lineare“ Abbildung

Lineare Gleichungssysteme

$$
\begin{array}{l}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n = b_m
\end{array}
$$

Mit dieser Notation hat das lineare Gleichungssystem aus 1.1 die Form:

$$\mathrm{A}x = b$$

Die in 1.2 eingeführte Matrixoperation liefert eine Abbildung

$$\mathrm{L}_\mathrm{A} : \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}^\mathbf{m},\ x \to \mathrm{A}x$$

Die Frage, ob $\mathrm{A}x = b$ eine Lösung hat, lässt sich daher auffassen, ob b in der Bildmenge $\mathrm{Bi}(\mathrm{L}_\mathrm{A}) := \{\mathrm{A}x : x \in \mathbb{R}^\mathbf{n}\}$ von L_A vorkommt.

Die lineare Algebra ist das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen

Kap. 0
Grundlagen zur Linearen Algebra

Grundbegriffe

Grundbegriffe
Produkt

- weitere zweistellige Grundoperation der Mengenlehre:

$$\boxed{A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}}$$

(kartesisches) Produkt

- verallgemeinerte Produktbildung für n Mengen ($n \geq 2$) :

$$\boxed{A1 \times \ldots \times An = \{ (a1, \ldots, an) \mid ai \in Ai \}}$$

- Elemente des Produkts von n Mengen heissen (n)-Tupel.

- spezielle Bezeichnungen für Tupel:
  - $n = 2$: Paare
  - $n = 3$: Tripel
  - $n = 4$: Quadrupel

Produkt von Mengen

Verallgemeinerung

Definition 0.3 Sei (A_i, $i \in$ **I**) **eine Familie von Mengen.**

Eine Menge X zusammen mit einer Familie von Abbildungen p_i: X → A_i heißt (kartesisches) **Produkt** der (A_i, $i \in$ **I**)**, wenn folgendes gilt:**

Zu jeder Menge Y und jeder Familie von Abbildungen
$f_i : Y \rightarrow A_i$ existiert genau eine Abbildung $f^*: Y \rightarrow X$ mit

$$\mathbf{p_i}{*}\, f^* = f_i$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A_i} & & \mathbf{X} \arrow[ll, "\mathbf{p_i}"'] \\ & & \\ & & \mathbf{Y} \arrow[uull, "\forall f_i"] \arrow[uu, "\exists! f^*"'] \arrow[uul, phantom, "="] \end{tikzcd}$$

Schreibweise: Π $\mathbf{A_i}$

Relationen

Definition 0.4

Eine **n-stellige Relation R** ist eine Teilmenge des karthesischen Produktes von n Mengen A_1, $A_2,\ldots,A_n$:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

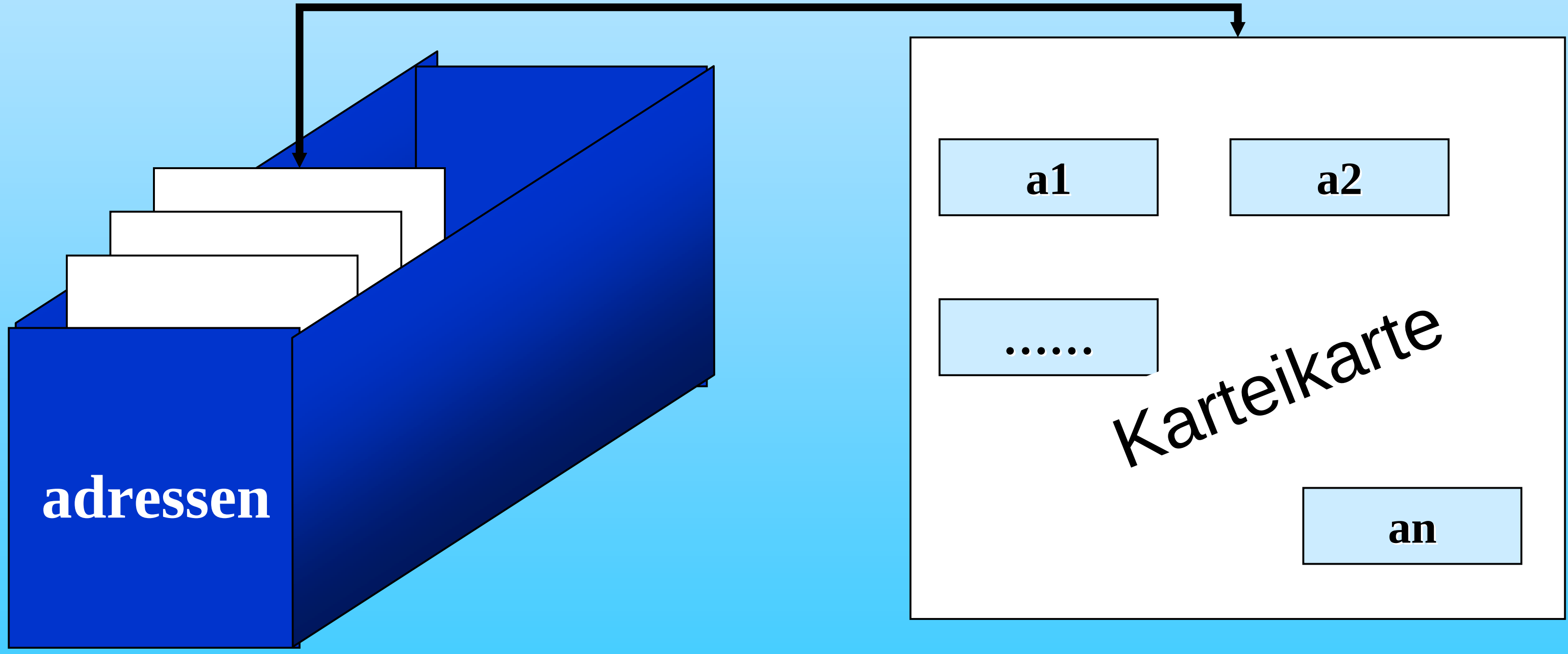
Schreibweise:

$$(a_1, a_2,\ldots,a_n) \in R \leftrightarrow R\,(a_1, a_2,\ldots,a_n)$$

Relationen
Beispiele

1. **Datenbanken: Tabelle**

   Beispiel: adressen(a1,a2,…,an)



Relationen
Beispiele

2. n-stellige Prädikate (= Fakten)

Satz (2-stell. Prädikat): Subjekt - Prädikat – Objekt

Schreibweise

Prädikat (Subjekt, Objekt)

Prädikat (Funktor) **Argumente**

Anzahl d. Argumente = **Stelligkeit**

Allgemein: n-stelliges Prädikat $p(a_1,\ldots , a_n)$

Anwendungen in der Informatik
Beispiel: Deklarative Programmiersprache Prolog

Für was steht PROLOG?

PROLOG

PROgramming in LOGic

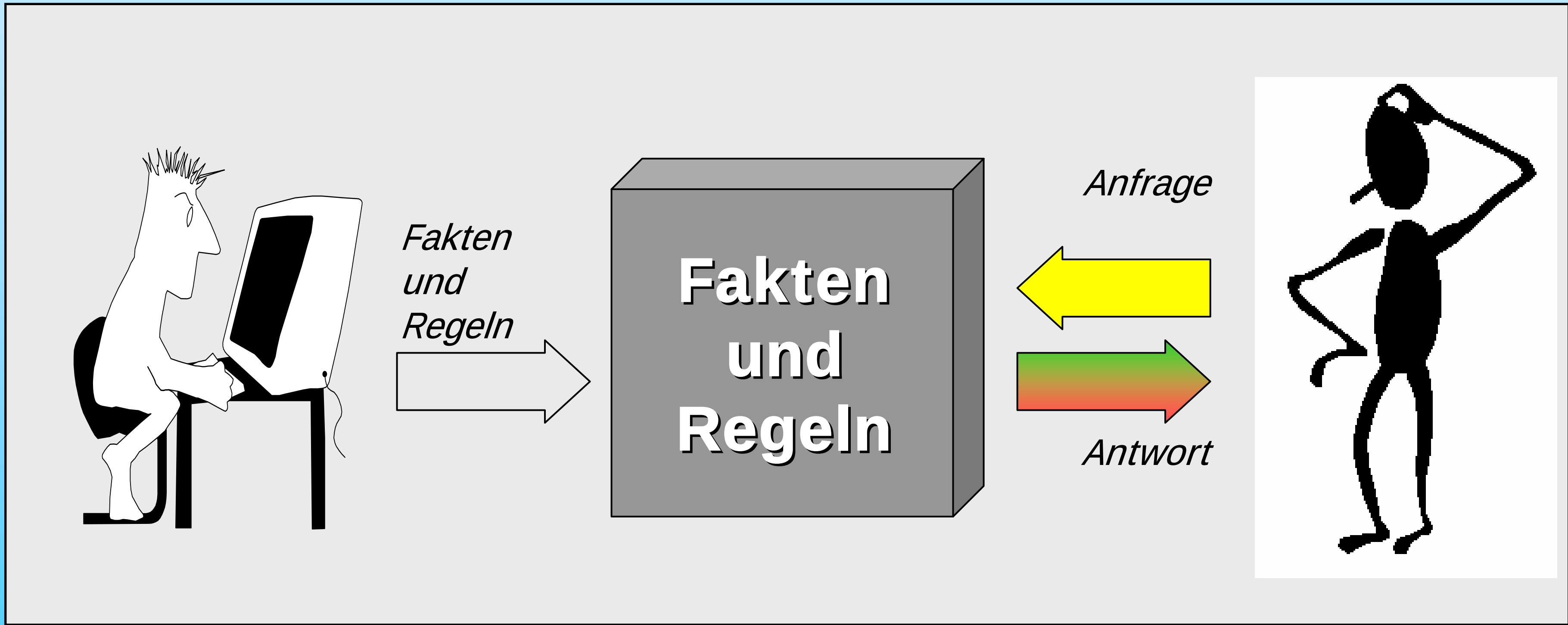
4 Programmierparadigmen

1. Imperatives Programmieren
2. Funktionales Programmieren
3. Deklaratives Programmieren*
4. Objektorientiertes Programmieren

* Es wird beschrieben, WAS das Problem ist, nicht jedoch wie dieses zu lösen ist. Die Lösung muss der Computer finden.

PROLOG

PROgrammieren in LOGig



Prolog-Progammierer

Prolog-Programiersystem

Benutzer

PROLOG

PROgrammieren in LOGig

Fakten = n-stellige Prädikate

$$p(a_1,\ldots,a_n).$$

p ist der Name des Fakts

$a_1, \ldots, a_n$ sind die Argumente des Fakts

Fakten 1

Beispiele:

Schreibweise in Prolog:	Natürliche Bedeutung:
• scheint(sonne).	• Die Sonne scheint.
• es_regnet.	• Es regnet.
• mensch(sokrates).	• Sokrates ist ein Mensch.
• männlich(daniel).	• Daniel ist männlich.
• liebt(johann,birgit).	• Johann liebt Birgit.
• besucht(bernd,vorlesung).	• Bernd besucht die Vorlesung.
• vater(hans, gabriel).	• Hans ist der Vater von Gabriel.

PROLOG

PROgrammieren in LOGig

Prologprogramm

- **Fakten**
- **Regeln**
- **Anfragen**

Regel

Wenn b1 und b2,..,und bn gelten,dann gilt auch f.

b_1 und b_2,…und b_n → f

Prologschreibweise

f :- $b_1,b_2,\ldots,b_n$.

Regeln 2

Die linke Seite (vor :-) ist wahr, wenn die rechte Seite bewiesen werden kann.

Komma zwischen zwei Fakten = UND-Verknüpfung.
Semikolon zwischen zwei Fakten = ODER-Verknüpfung.
Es kann geklammert werden.

Verneinung: Mit not kann verneint werden.

Variable beginnen mit Großbuchstaben oder Unterstrich

(z.B. X, Y, Student).

Die Regeln werden auch Horn-Klauseln genannt.

PROLOG

PROgrammieren in LOGig

Prologprogramm

- **Fakten**
- **Regeln**
- **Anfragen**

Gelten die Fakten
p1, p2,…, pn ?

Prologschreibweise
? p1, p2,…, pn

PROLOG

PROgrammieren in LOGig

	Prologprogramm
Fakten Sokrates ist ein Mensch.	mensch(sokrates).
•Regeln Alle Menschen sind sterblich.	sterblich(X):- mensch(X).
Anfragen Ist Sokrates sterblich?	sterblich(sokrates).

Die Lösung eines Kriminalfalles

```
person( heinrich, 25, m , fotograph).
person( heinrich, 25, m , gaernter).
person( ivon,     22, w , kindermaedchen ).
person( berthold, 55, m , fahrer ).
person( johann,   25, m , taschendieb).

hatte_Beziehungen_zu(ivon,johann).
hatte_Beziehungen_zu(ivon,berthold ).
hatte_Beziehungen_zu(susanne,johann).

ermordet_mit(susanne,harter_Gegenstand).
ermordet(susanne).
........
```

```
........

moerder(Moerder) :-
      person(Moerder,_,_,_),
      ermordet(Ermordete),
      verdaechtig(Moerder),
      befleckt_mit(Moerder,Substanz),
      befleckt_mit(Ermordete,Substanz).
```

Relation

Spezialfall: Binäre Relationen und Graphen

Eine binäre Relation R kann durch einen Graphen veranschaulicht werden in dem jedes Tupel (a,b) als Kante zwischen den Knoten a und b interpretiert wird.

$$(a,b) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad a \longrightarrow b$$

Umgekehrt entspricht jede Kante (a,b) eines Graphen die zwei Knoten a und b verbindet einer Relation R für die

aRb als „a ist mit b direkt verbunden“ interpretiert werden kann.

Relationen

Binäre Relation

Definition 0.4

Eine **binäre Relation R** ist eine Teilmenge des karthesischen Produktes zweier Mengen A und B:

$$R \subseteq A \times B$$

Für

$$(a,b) \in R$$

schreibt man auch

$$aRb \text{ oder } R\,(a,b)$$

Binäre Relationen

Reflexivität

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist reflexiv, wenn jedes Element von S zu sich selbst in Relation steht:

$$\forall\ x: x \in S: xRx$$

Z B: die Relation „hat dieselbe Mutter wie“ ist reflexiv

Reflexive Relationen können durch einen Graphen modelliert werden, bei dem alle Knoten Schlaufen haben.

Binäre Relationen

Symmetrie

Eine binäre Relation $R \subseteq S \times S$ ist symmetrisch, wenn aus xRy auf yRx geschlossen werden kann:

$$\forall\ x,y\colon x,y \in S\colon xRy \Rightarrow yRx$$

z. B.: die Relation „ist verheiratet mit“ ist symmetrisch

Symmetrische Relationen entsprechen ungerichteten Graphen.

Binäre Relationen

Transitivität

Eine binäre Relation R $\subseteq$ S$\times$S ist transitiv, wenn aus xRy und yRz auf xRz geschlossen werden kann:

$$\forall\, x,y,z \in S: (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

z. B.: die Relation „ist Vorfahre von“ ist transitiv

Äquivalenzrelation

ein zentraler Begriff der Mathematik

Definition 0.5: Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine binäre Relation ~ auf M, die

- **reflexiv,** $\forall\, x \in M: \quad x \sim x$
- **symmetrisch** $\forall\, x,y \in M: \quad x \sim y \rightarrow y \sim x$ **, und**
- **transitiv** $\forall\, x,y,z \in M: x \sim y$ **und** $y \sim z \rightarrow x \sim z$ **ist.**

Definition 0.6 Äquivalenzklasse

Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf M und $a \in M$. Dann heißt die Menge der zu a äquivalenten Elemente die Äquivalenzklasse von a.

$$[a] := \{x \in M;\ x \sim a\}.$$

Definition 0.7

$M/\sim\ := \{\ [a];\ a \in M\ \}$ = Menge der Äquivalenzklassen von ~ heißt der Quotientenraum von M bzgl. ~

Partitionen

Definition 0.8

Sei *A* eine Menge. Ein System *P*= {Ai $\subseteq$ A, i $\in$ I } aus Teilmengen A_i von *A* heißt eine **Partition** auf *A*, falls

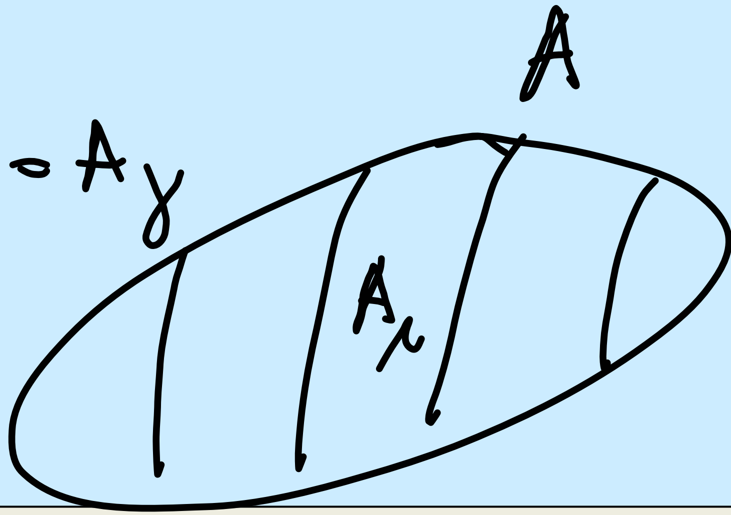
P1) die Vereinigung von *P* ganz *A* ist,
***P2) P* eine disjunkte Mengenfamilie ist und**
P3) jedes Element in *P* nicht leer ist.

d.h.

P1) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

P2) $\forall_{i,j \in I} \; A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow A_i = A_j$

P3) $\forall_{i \in I} \; A_i \neq \emptyset$



Äquivalenzrelationen

Beispiel: Funktionen

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion, dann definiert

$$a \sim a' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$$

eine Äquivalenzrelation auf A

$A/\sim := \{ [a]; a \in A \}$ = Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ ist der **Quotientenraum** von A bzgl. $\sim$

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz 0.9: Äquivalenzrelationen und Partitionen sind äquivalente Begriffe.

Beweis:

1) Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf A, dann definiert der Quotientenraum A/~ eine Partition auf A.
2) Sei $P = \{A_i \subseteq A,\ i \in I\}$ eine Partition auf A, dann definiert ~ mit $a,b \in A$: $a \sim b \iff$ Es gibt $A_i \in P$ mit $a,b \in A_i$ eine Äquivalenzrelation auf A.
3) Wendet 1 und 2 hintereinander an, so erhält man jeweils die Ausgangsäquivalenzrelation bzw. Ausgangspartition.

Grundlegende Definitionen und Beispiele
Mengen mit Verknüpfung

Definition 0.10.
(i) Eine Verknüpfung **T auf einer Menge A ist eine Abbildung**

$$T : A \times A \rightarrow A$$
$$(a, b) \rightarrow a\,T\,b\,,$$

die jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen a, b der Menge A ein weiteres Element (a T b) $\in$ A zuordnet.

(ii) Eine Verknüpfung T heißt assoziativ**, wenn gilt**

$$aT\,(bT\,c) = (aT\,b)Tc \quad \text{für alle } a, b, c \in A.$$

(iii) Die Verknüpfung heißt kommutativ oder abelsch **genau dann, wenn Gilt aT b = bT a für alle a, b $\in$ A.**

Ist eine Verknüpfung assoziativ, so liefern Ausdrücke der Form $a_1 T\, a_2 \ldots T\, a_n$ wohlbestimmte Elemente von A, das Resultat ist unabhängig davon, wie man die Klammern setzt.

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition 0.11

Es seien **G** eine nichtleere Menge,

eine Abbildung **T** : G x G → G

und e $\in$G ein Element.

Man nennt (G, **T**,e) eine **Gruppe**, wenn gilt

G1) **T** ist **assoziativ**, $\forall$ $\mathbf{a,b,c \in G: (aTb)\ Tc = aT\ (bTc)}$

G2) e ist ein **neutrales Element**:

$$\forall\ \mathbf{a \in G: eTa=aTe=a}$$

G3) alle Elemente haben ein **Inverses**,

$$\forall\ \mathbf{a \in G\ \exists\ a^{-1} \in G : aT\ a^{-1} = a^{-1}Ta = e}$$

Grundlegende Definitionen und Beispiele

G ist die *Trägermenge* der Gruppe,

T die *Gruppenoperation*.

Ist die Gruppenoperation kommutativ,

G4) $\forall$ **a, b $\in$ G : a T b = b T a**

so spricht man von einer

kommutativen oder abelschen Gruppe.

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Gruppen

Beispiele für Gruppen:

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition,
- Die rationalen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$
- Für jede nichtleere Menge M ist die Menge

$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

aller bijektiven Selbstabbildungen mit der

Abbildungskomposition eine Gruppe.

S(M) heißt die **symmetrische Gruppe** auf M,

ihre Elemente heißen ***Permutationen* von M**.