Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Einführung u.
Wiederholung wichtiger
Grundbegriffe

M.B. Wischnewsky

24.10.2005

Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Kap. 0 Gruppen

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition 0.11

Es seien **G** eine nichtleere Menge, eine Abbildung **T** : $G \times G \to G$

und $e \in G$ ein Element.

Man nennt (G, **T**,e) eine **Gruppe**, wenn gilt

G1) **T** ist **assoziativ**,

$$\forall\, a,b,c \in G: (aTb)\, Tc = aT\, (bTc)$$

G2) e ist ein **neutrales Element**:

$$\forall\, a \in G: eTa = aTe = a$$

G3) alle Elemente haben ein **Inverses**,

$$\forall\, a \in G\ \exists\, a^{-1} \in G : aT\, a^{-1} = a^{-1}Ta = e$$

Grundlegende Definitionen und Beispiele

G ist die *Trägermenge* der Gruppe,

T die *Gruppenoperation*.

Ist die Gruppenoperation kommutativ,

G4) $\forall$ **a, b $\in$G : a T b = b T a**

so spricht man von einer

kommutativen oder abelschen Gruppe.

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Gruppen

Symmetrische Gruppe:

Für jede nichtleere Menge M ist die Menge

$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

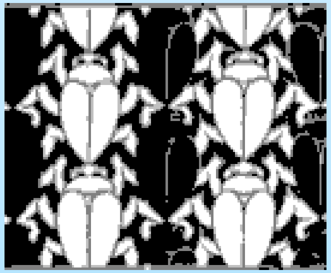
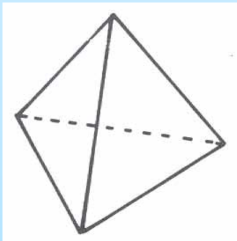
aller bijektiven Selbstabbildungen mit der

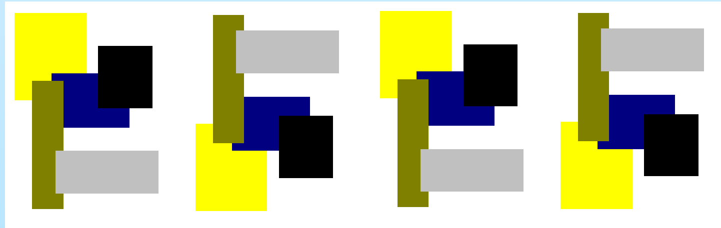
Abbildungskomposition eine Gruppe.

S(M) heißt die **symmetrische Gruppe** auf M,

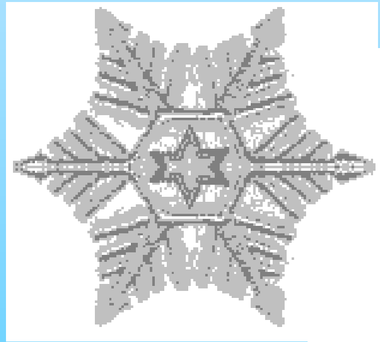
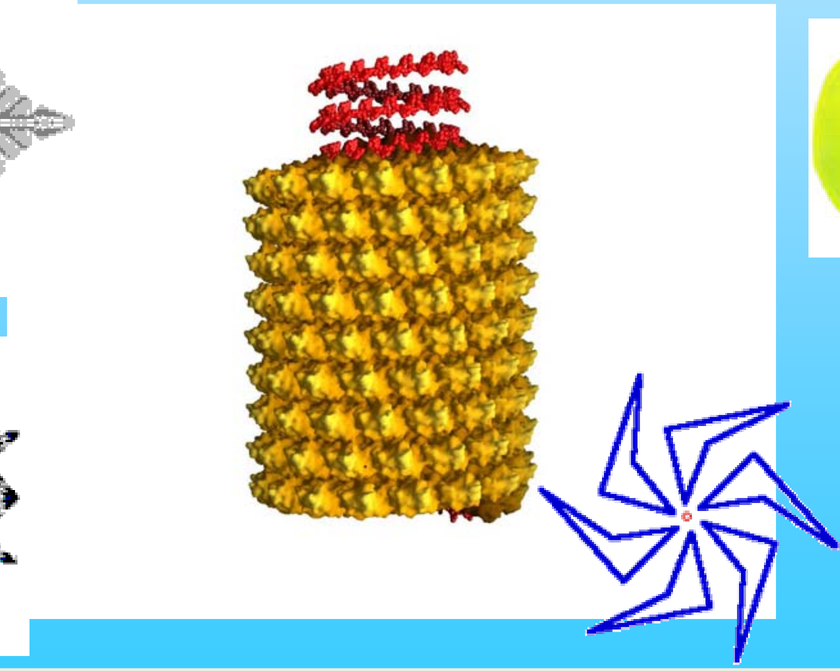
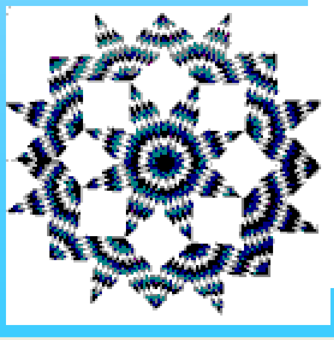
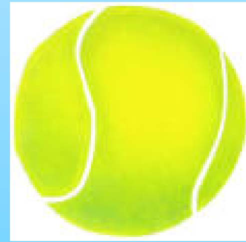
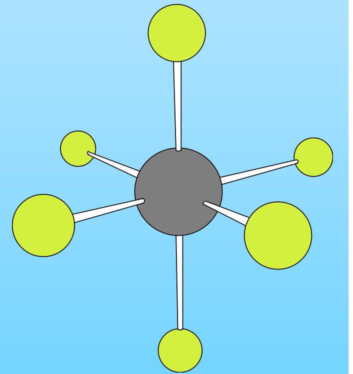
ihre Elemente heißen ***Permutationen* von M**.

Anwendungen der Gruppen Theorie
Beschreibung von Symmetrien

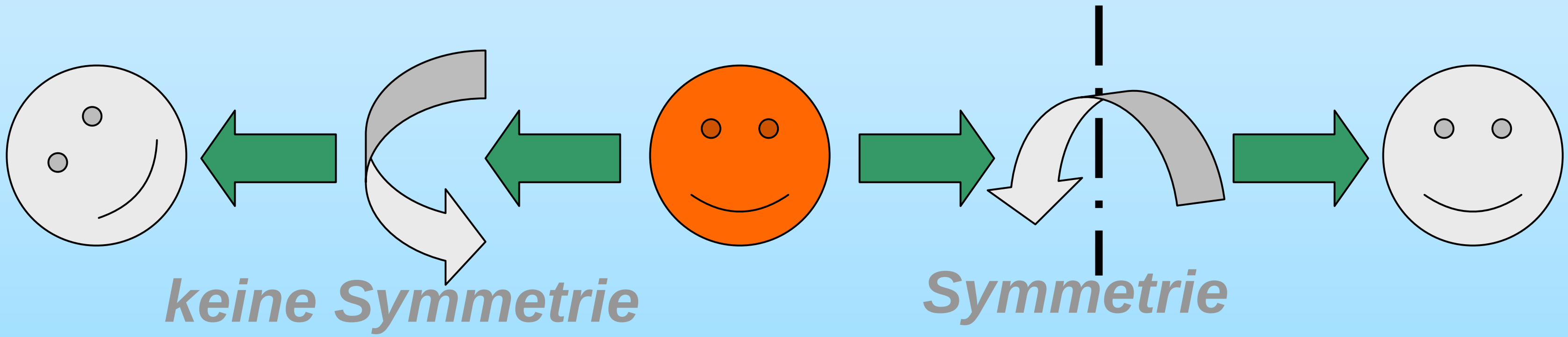





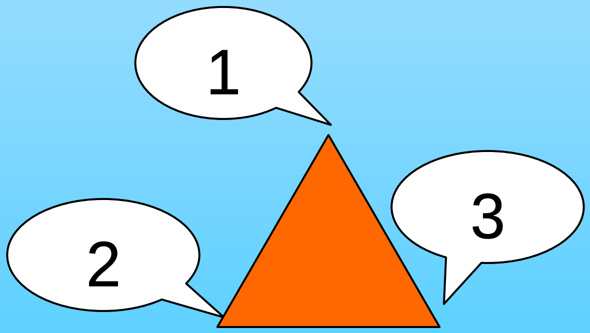
Symmetrie umgibt uns überall. Sie ist eine grundlegende Eigenschaft der Natur.


Symmetrien und Permutationen (1)



Symmetrien eines Dreiecks:



$1\rightarrow 2,\ 2\rightarrow 3,\ 3\rightarrow 1$	(123)
$1\rightarrow 3,\ 3\rightarrow 2,\ 2\rightarrow 1$	(132)
$1\rightarrow 2,\ 2\rightarrow 1,\ 3\rightarrow 3$	(12)
$1\rightarrow 1,\ 2\rightarrow 3,\ 3\rightarrow 2$	(23)
$1\rightarrow 3,\ 3\rightarrow 1,\ 2\rightarrow 2$	(13)
$1\rightarrow 1,\ 2\rightarrow 2,\ 3\rightarrow 3$	“tue nichts=Identität”

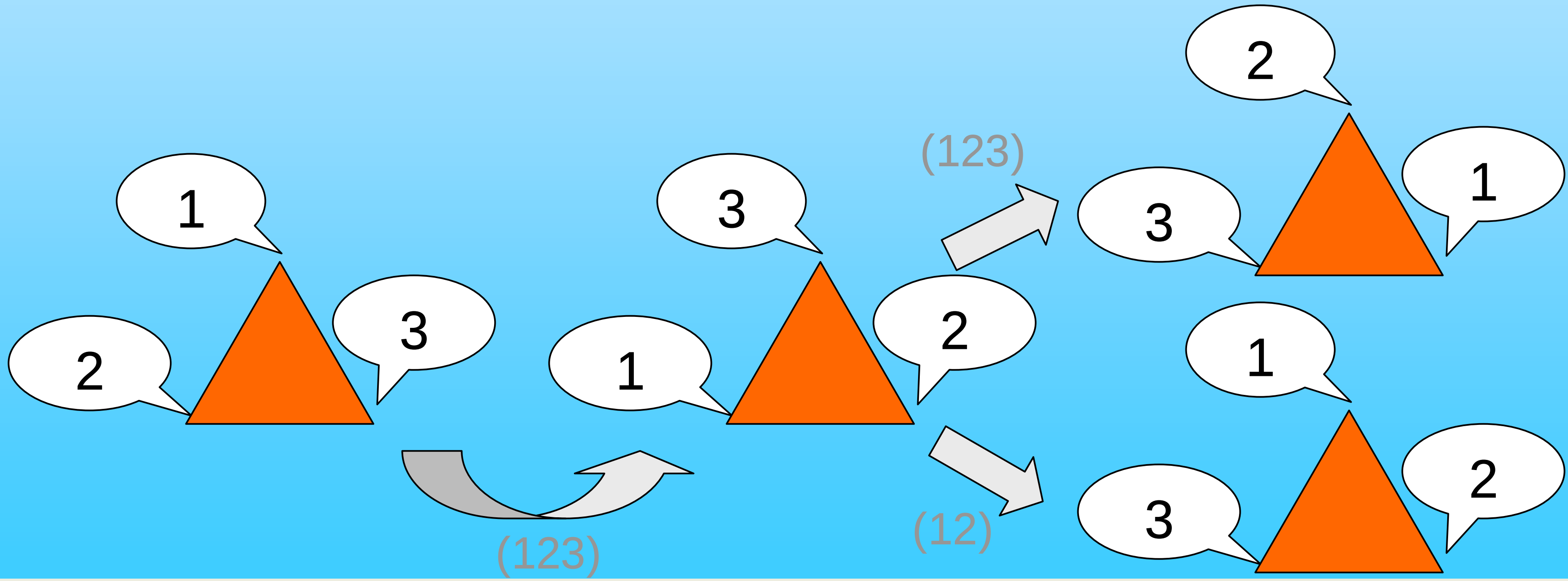
Zyklen müssen disjunkt sein.

Symmetrien und Permutationen (2)

wende (123) an und dann wieder (123): erhalte (132)

wende (123) an und dann (12) : erhalte (23)

alle nicht-trivialen Symmetrien sind Produkte von (123) und (12) **- “Generatoren”**



Symmetrien und Permutationen (3)

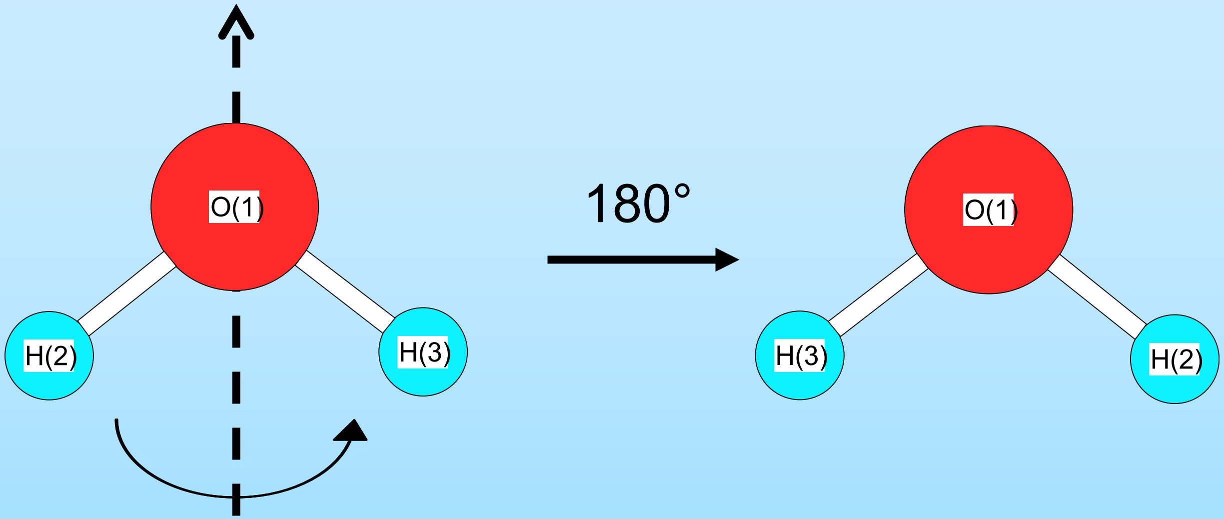
Idee: Repräsentiere Symmetrien eines Objektes durch Permutationen, die das Objekt erhalten (=bijektive Abbildungen).

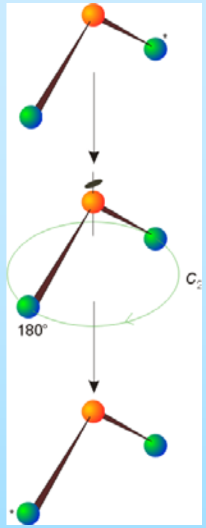
Komposition von Symmetrien wird modelliert durch die Komposition von Permutationen

- **Komposition ist assoziativ.**
- **Jede Symmetrie hat eine Inverse.**
- **Die "tue-nichts" Symmetrie ist die Identität.**

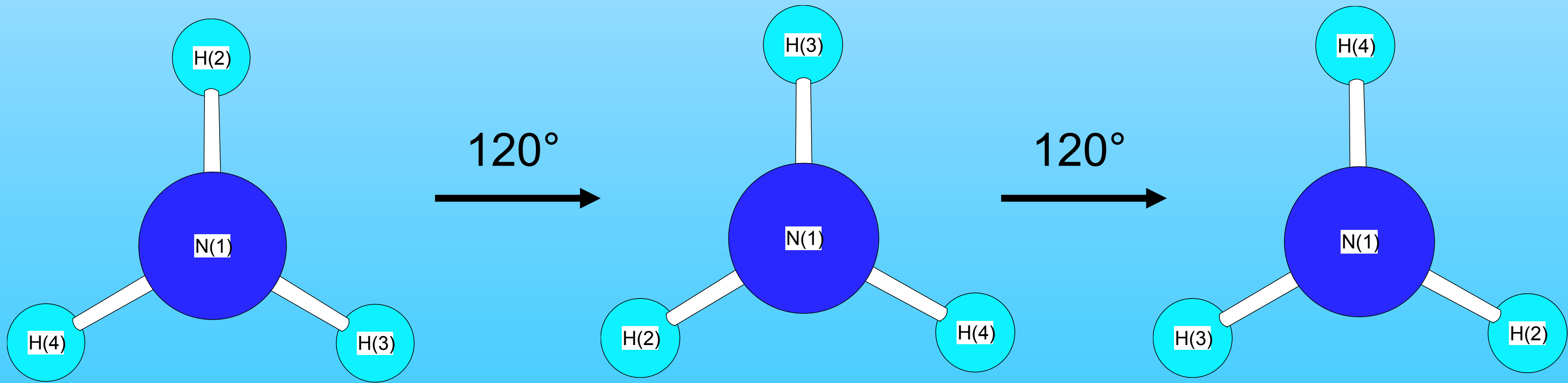
Dies ermöglicht die Anwendungen der Gruppentheorie.

n-fach Rotation - eine Rotation von 360°/n um die C_n Achse (n = 1 to ∞)





In Wasser gibt es eine C_2 Achse, so dass wir eine 2-fach (180°) Rotation durchführen können, die zur gleichen Anordnung der Atome führt.

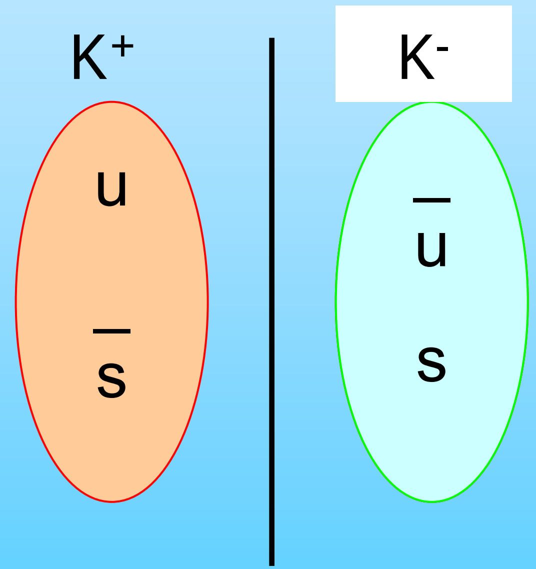


In Ammoniak haben wir eine C_3 Achse, so dass wir eine 3-fach (120°) Rotation durchführen können, die zur gleichen Anordnung der Atome führt

Materie-Antimaterie Symmetrie

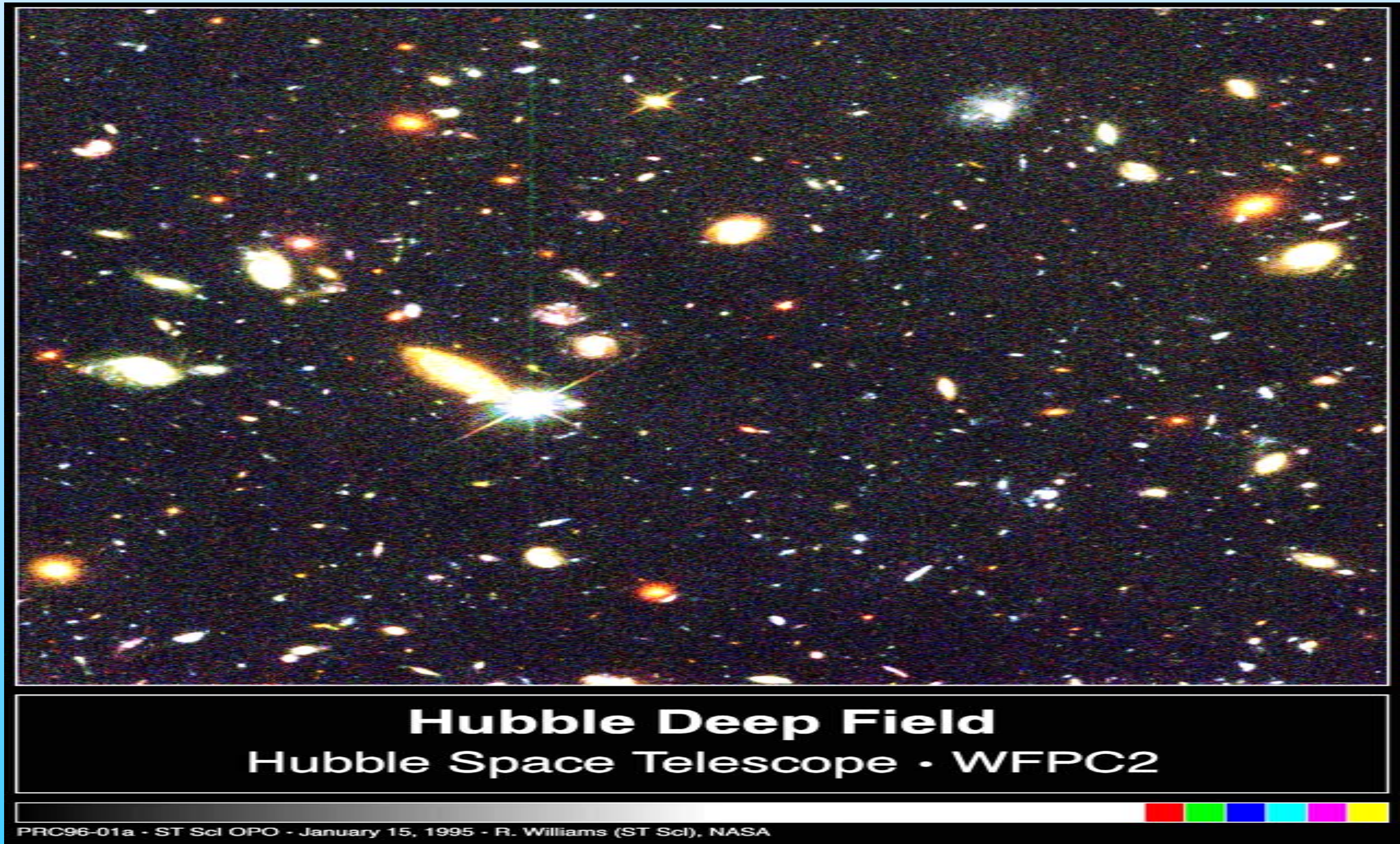
Symmetrieoperation “CP”

- **P Paritätstransformation ist eine Punktspiegelung**
  - **(x,y,z) ↔ (-x,-y,-z)**
- **C Ladungskonjugation – ändert alle Ladungen**
  - **Teilchen ↔ Antiteilchen**



CP ist eine exakte Symmetrie in der Physik

Wo ist die Antimaterie ?



Spezialfall: Symmetrische Gruppe S_n

Definition **(S_n):**

S_n bezeichne die Menge aller Permutationen der Menge $N_n = \{1, 2, \dots , n\}$, d.h. die Menge der bijektiven Abbildungen von N_n.

S_n heißt symmetrische Gruppe.

$\pi \in S_n$ *heißt Permutation vom Grade n*

Anzahl der Elemente von S_n: n!

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \pi[1] & \pi[2] & \pi[3] & \dots & \pi[n-1] & \pi[n] \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe Sn

Seien

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \text{ u.}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

1. $$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(\sigma(1)) & \pi(\sigma(2)) & \dots & \pi(\sigma(n)) \end{pmatrix}$$

2. Inverse $$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe Sn

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Gruppenhomomorphismus

Definition 0.12

Seien G und G´ zwei Gruppen, wobei die jeweiligen neutralen Elemente mit $e \in G$ bzw. mit $e' \in G$ bezeichnet seien.

Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ eine Abbildung, dann nennen wir φ einen **Gruppenhomomorphismus**, falls sie die folgende Bedingung erfüllt

$$\boxed{\forall\ x; y \in G \text{ gilt } \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)}$$

und in diesem Fall erfülllt φ sogar die beiden weiteren Eigenschaften

$$\varphi(e) = e' \text{ und } \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

Gruppenhomomorphismen

Definition 0.13

Seien G,G` Gruppen.

1. Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ eine Abbildung, dann nennen wir φ einen **Gruppenhomomorphismus**, falls sie die folgende Bedingung erfüllt

$$\forall\ x; y \in G \text{ gilt } \varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$$

2. Ein injektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch **Monomorphismus**.

(Cf. griechisch **μονος einzig**, z.B. der Monarch als Alleinherrscher.)

3. Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch **Epimorphismus**.

(Cf. griechisch **επι darauf**, z.B. das Epizentrum eines Erdbebens, das auf der Erdoberfläche ¨uber dem Zentrum im Erdinneren liegt.)

Gruppenhomomorphismen

4. *Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch Isomorphismus. (Cf. griechisch* $\iota\sigma o\varsigma$ *derselbe, z.B. das Iso-top als Element am selben Platz im Periodensystem.)*

5. *Zwei Gruppen heißen isomorph genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.*

6. *Ein Gruppenhomomorphismus einer Gruppe in sich selbst heißt auch Endomorphismus. (Cf. griechisch* $\epsilon\nu\delta o$ *in hinein, z.B. die Endo-skopie, bei der man in den Körper hinein schaut.)*

Körper

Definition 0.14: Ein *Körper* K ist eine Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen (Addition,Multiplikation) $K \times K \to K$ mit folgenden Eigenschaften:

1^o K ist eine additive abelsche Gruppe bezüglich der Addition (mit Nullelement 0).

2^o $K \setminus \{0\}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation (mit Einselement 1).

3^o $a(b+c) = ab + ac$ für alle a,b,c aus K .

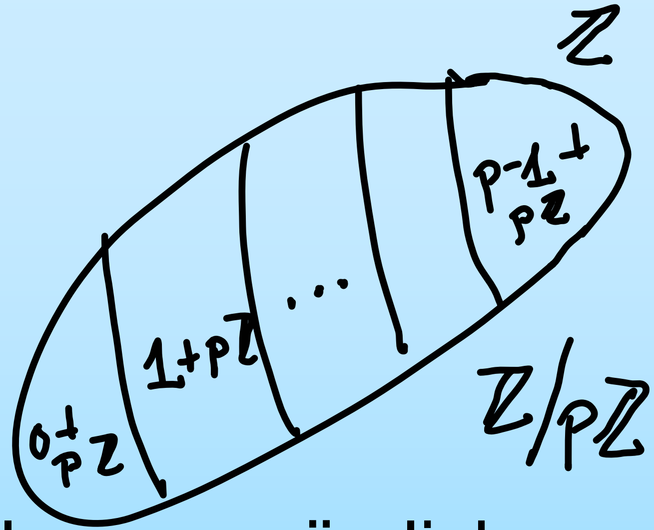
(0.15) Beispiele:

1^o $\mathbb{R}$**, und** $\mathbb{Q}$ sind Körper **,** $\mathbb{Z}$ ist aber kein Körper.

2^o Die zweielementige Gruppe : G = {0,1} mit
$0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$ und $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

3^o Endliche Körper mit p Elementen (p Primzahl): $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p Primzahl



Beispiel $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es gibt 3 Restklassen, nämlich die von [0], [1], [2],

$$0+\mathbf{3}\mathbb{Z} = \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$$
$$1+\mathbf{3}\mathbb{Z} = \{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$$
$$2+\mathbf{3}\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

Körper

7° **Der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*:**

$\mathbb{C}$ ist die Menge der reellen Zahlenpaare $\mathbb{R}^2$ mit der

Addition:

$$(x,y) + (v,w) := (x+v, y+w) \,,$$

Multiplikation:

$$(x,y)(v,w) := (xv-yw, xw+yv) \,,$$

Für x,y,v,w aus $\mathbb{R}$ **.**

$\mathbb{C}$ mit diesen Verknüpfungen ist ein Körper.

Es gilt in $\mathbb{C}$:

$0 := (0,0)$ ist die Null in $\mathbb{C}$

$1 := (1,0)$ ist das Einselement in $\mathbb{C}$ **,**

Die Inverse zu (x,y) aus $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

Körper

Notation in $\mathbb{C}$:

$i := (0,1)$ erfüllt die Gleichung $i^2 + 1 = 0$,

$x + iy := (x,y)$,

$\mathrm{Re}\,(x,y) = \mathrm{Re}\,(x+iy) := x$

$\mathrm{Im}\,(x,y) = \mathrm{Im}\,(x+iy) := y.$

Multiplikation mit der Notation $x + iy$:

$(x + iy)(v + iw) = xv-yw + i(xw+yv)$.

Definition 0.16: Unterkörper, Homomorphismus, Isomorphismus analog zu Gruppen.

Ein Homomorphismus $f: K \to K'$ zwischen Körpern erfüllt also

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ und

$f(ab) = f(a)f(b)$

für alle a und b aus K. Insbesondere: $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

Anwendungsbereiche

„Neue mathematische Strukturen über Körpern“

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \text{Polynomringe } K[x_1,\ldots,x_n] \\
\text{Körper } K \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{K-Vektorräume}
\end{tikzcd}
$$

Mathematatik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Kap. 1 Vektorräume und lineare Abbildungen

Der Standardraum $\mathbb{R}^n$

Def. 1.1. $\mathbb{R}^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\ldots n \right\} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\ldots n \right\}$$

Es werden zwei *Verknüpfungen* definiert auf $\mathbb{R}^n$, die *Addition* von Spaltenvektoren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Der Standardraum $\mathbb{R}^n$

Also

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die *Skalarmultiplikation* wird definiert durch

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

Der Standardraum $\mathbb{R}^n$

(1.2) Rechenregeln: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $r, s \in \mathbf{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

1° (x + y) + z = x + (y + z)

2° Für den Vektor o **aus** $\mathbb{R}^n$ **mit lauter Nullen als Komponenten gilt:**

x + o = x = o + x .

3° Zu jedem x aus $\mathbb{R}^n$ **existiert -x aus** $\mathbb{R}^n$ **mit x+(-x) =** o.

4° x + y = y + x

5° r(sx) = (rs)x

6° 1x = x

7° r(x + y) = rx + ry

8° (r+s)z = rz + sz

Der Nullvektor o **wird auch mit 0 bezeichnet. Vorsicht!**

Der abstrakte Vektorraum*

Der Begriff des Vektorraumes ist wie folgt definiert:

Definition 1.3: Ein *Vektorraum über dem Körper* K ist eine additive abelsche Gruppe V, also für alle x,y,z aus V :

1° $(x + y) + z = x + (y + z)$
2° Es gibt 0 (*Nullvektor*) mit: $x + 0 = x = 0 + x$.
3° Zu jedem x aus V existiert -x aus V mit $x+(-x) = 0$.
4° $x + y = y + x$,

zusammen mit einer *Skalarmultiplikation* $K \times V \to V, (r,v)\ \alpha\ \ rv$,
so dass für alle x,y aus V und alle r,s aus K :

5° $1x = x$.
6° $r(x + y) = rx + ry$.
7° $(r + s)x = rx + sx$.
8° $(rs)x = r(sx)$.

* Stefan Banach 1922

Der abstrakte Vektorraum
Beispiele

1.4. Sei K ein Körper

$$K^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{K}, i = 1,2,\ldots n \right\}$$

ist ein Vektorraum über K mit folgender Addition u. skalaren Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbf{K}$$

Der abstrakte Vektorraum
Beispiele

(1.5) Räume von Abbildungen:
Sei K ein Körper und M eine nichtleere Menge.
Die Menge der Abbildungen $\mathbf{K^M := Abb(M,K)}$
ist in natürlicher Weise ein K-Vektorraum bezüglich:

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \,,$$
$$(rf)(m) := rf(m)$$

für $f,g \in K^M$, $r \in K$ und $m \in M$.

Bemerkungen:

1° Der Standardraum K^n kann als Abbildungsraum aufgefasst werden. Für $M = \{1,2, \ldots ,n\}$ ist $K^M = K^n$.

Der abstrakte Vektorraum
Beispiele

2^o **Verallgemeinerung:**

Für einen Vektorraum V über K ist
V^M= Abb(M,V) wieder ein K-Vektorraum.

3^o Polynome vom Grade ≤ n über einem Körper K

$P_n := \{ p(x)= a_0+a_1x^1+ \ldots +a_nx^n; a_i \in K \ (i=0,\ldots n) \}$

ist mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum mit p(x)=0 für alle x und
$q(x)= -a_0-a_1x^1- \ldots - a_nx^n$ als Inverses zu p(x).

4^0 $C^0(I) := \{f: I \to \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ ist ein Vektorraum mit der üblichen punktweisen Addition und skalaren Multiplikation

Der abstrakte Vektorraum

Definition 1.5 Sei V eine Vektorraum über K.
Ein *Untervektorraum* ist eine Menge $U \subseteq V$, die bezüglich der auf V gegebenen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über K ist.

Bemerkung:
Die meisten Vektorräume von Bedeutung in der Analysis sind Untervektorräume von K^M für $K = \mathbf{R}$ oder $K = \mathbf{C}$.

Der abstrakte Vektorraum

Satz 1.6: Sei V eine Vektorraum über K.
Eine nichtleere Menge U in V ist genau dann ein Untervektorraum,
wenn für alle $x,y \in U$ und alle $r \in K$ gilt:
$x+y$ und $rx \in U$.

1.7 Beispiele: Sei V eine Vektorraum über K.

1° {0} und V sind Untervektorräume von V.

2° Sei $x \in V\setminus\{0\}$.
Dann ist die Menge **$Kx := \{rx : r \in K\}$** ein Untervektorraum von V .

3° Sind U_i ,$i \in I$ eine Familie von Untervektorräumen von V, so ist auch der Durchschnitt $\cap U_i$ eine Untervektorraum.