Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Elementare Theorie der Vektorräume

M.B. Wischnewsky

28. 04. 2006

Kapitel II. Elementare Theorie der Vektorräume

Die grundlegenden Begriffe

„Erzeugendensystem“,
„lineare Unabhängigkeit “, und
„Basis“

werden eingeführt und studiert.

Diesen Begriffen liegt der Begriff der „Linearkombination“ zugrunde.

Der abstrakte Vektorraum*

Wiederholung

Der Begriff des Vektorraumes ist wie folgt definiert:

Definition 1.3: Ein *Vektorraum über dem Körper* K ist eine additive abelsche Gruppe V, also für alle x,y,z aus V :

1° $(x + y) + z = x + (y + z)$

2° Es gibt 0 (*Nullvektor*) mit: $x + 0 = x = 0 + x$.

3° Zu jedem x aus V existiert $-x$ aus V mit $x+(-x) = 0$.

4° $x + y = y + x$,

zusammen mit einer *Skalarmultiplikation* $K \times V \to V, (r,v) \mapsto rv$, so dass für alle x,y aus V und alle r,s aus K :

5° $1x = x$.

6° $r(x + y) = rx + ry$.

7° $(r + s)x = rx + sx$.

8° $(rs)x = r(sx)$.

* Stefan Banach 1922

Der abstrakte Vektorraum

Wiederholung

Die Axiome 1-8 garantieren, dass man mit Summen, Differenzen und Vielfachen wie gewohnt rechnen darf. Insbesondere gelten:

- **$-a = (-1)a$**
- **$-(-a) = a$**
- **$-(a+b) = -a - b$**
- **$sa = 0 \Leftrightarrow s = 0$ oder $a = 0$**

Bemerkung zu **sa = 0 <-> s =0 oder a = 0**

Seien $sa = 0$ u. $s \neq 0$. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} &1/s\,(sa) = 1/s\,0 = 0 \\ &\hookrightarrow (1/s \cdot s)a = 1a = a \end{aligned}\right\} a = 0$$

Folgerung:

$sa = 0$ u. $s \neq 0 \Rightarrow a = 0$ bzw.

$sa = 0 \Rightarrow (s = 0 \text{ oder } a = 0)$

Der abstrakte Vektorraum

Satz 1.6: Sei V eine Vektorraum über K.
Eine nichtleere Menge U in V ist genau dann ein **Untervektorraum**, wenn gelten:
U1) für alle $x,y \in U \rightarrow x+y \in U$ und
U2) für alle $r \in K$ und $x \in U \rightarrow rx \in U$.

1.7 Beispiele: Sei V eine Vektorraum über K.

1° {0} und V sind Untervektorräume von V.

2° Sei $x \in V$.
Dann ist die Menge $\mathbf{Kx := \{rx : r \in K\}}$ ein Untervektorraum von V .

3° Sind U_i ,$i \in I$ eine Familie von Untervektorräumen von V, so ist auch der Durchschnitt $\cap U_i$ eine Untervektorraum.

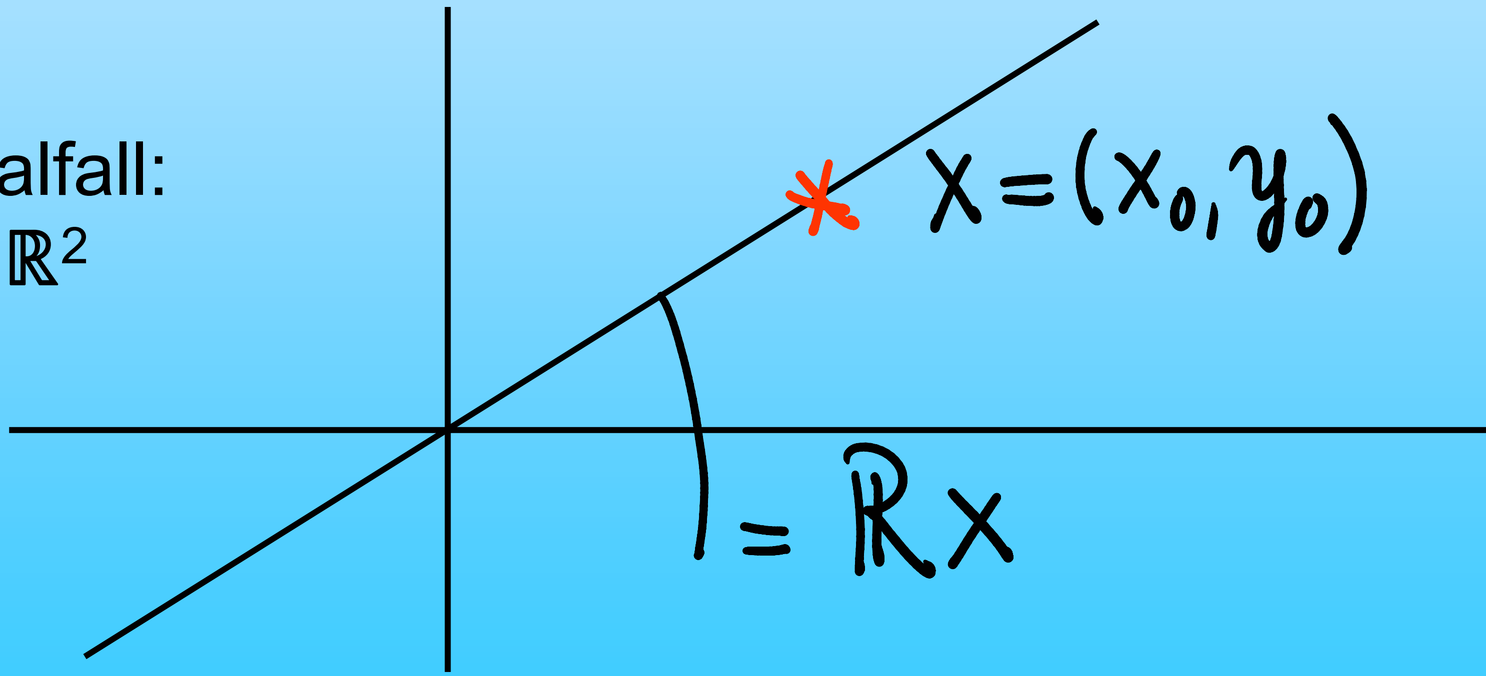
Bemerkung:

$Kx := \{ rx ; r \in K \} \subseteq V$ ist Untervektorraum

<u>Beweis</u> $rx, r'x \in Kx \Rightarrow$

$rx + r'x = (r+r')x \in Kx \quad \square$

Spezialfall:
$V = \mathbb{R}^2$



Elementare Theorie der Vektorräume

Linearkombination und Erzeugendensystem

Definition 1.8 Sei V ein K-Vektorraum.

1° Für Vektoren $a_1, a_2, ..., a_m \in V$ und $s_1, s_2, ..., s_m \in K$, heißt

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_m a_m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} s_\mu a_\mu$$

Linearkombination der $a_1, a_2, ..., a_m$.

2° Für eine Teilmenge A aus V heißt

$$\mathrm{Lin}(A) := \left\{ \sum_{\mu=1}^{\mu=m} s_\mu a_\mu : s_\mu \in K \text{ und } a_\mu \in V \text{ für } \mu = 1,2,\ldots,m,\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

die **lineare Hülle** von A

(= Menge aller (endl.) Linearkombinationen von Elementen aus A .

3° Eine Teilmenge A aus V heißt **Erzeugendensystem** des Vektorraums V, wenn Lin(A) = V gilt.

Satz Sei $A \subseteq V_K$ Teilmenge. Dann gilt

$$\mathrm{Lin}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} r_k a_k \;;\; r_k \in K, a_k \in A;\; m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \bigcap_{\substack{A \subseteq U \\ U \text{ Unterraum von } V}} U$$

Beweis

1) $\mathrm{Lin}(A) \subseteq \bigcap_{\substack{A \subseteq U \\ U \text{ Unterr. von } V}} U$

Sei U Unterr von V mit $A \subseteq U \Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i a_i \in U \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \rho_i a_i \in \bigcap_{A \subseteq U} U$$

2) Es gelten $A \subseteq \mathrm{Lin}(A)$ u. $\mathrm{Lin}(A)$ Unterraum von V $\Longrightarrow$

$$\bigcap_{\substack{A \subseteq U \\ U \subseteq V \text{ Untervektorr.}}} U \subseteq \mathrm{Lin}(A).$$

Beweis

(i) Da $1a = a \Rightarrow A \subseteq \mathrm{Lin}(A)$

(ii) Summe u. skalare Vielfache von Linearkomb. aus $\mathrm{Lin}(A)$ liegen wieder in $\mathrm{Lin}(A)$.

(i) u. (ii) $\Longrightarrow \bigcap_{A \subseteq U} U \subseteq \mathrm{Lin}(A)$. $\square$

Elementare Theorie der Vektorräume

Linearkombination und Erzeugendensystem

Satz 1.9 Sei V ein K-Vektorraum, A aus V .

1° Entsprechend dem Kriterium für Untervektorräume (vgl. 1.6) gilt:

Eine Teilmenge U von V ist genau dann ein Untervektorraum, wenn sie *abgeschlossen gegenüber Linearkombinationen* ist, das heißt, wenn für alle $s_\mu \in K$ und $a_\mu \in U$, $\mu = 1,2,\dots,m$, stets $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} s_\mu a_\mu \in U$ gilt. Daher:

2° A ist genau dann Untervektorraum, wenn Lin(A) = A .

3° Lin(A) ist immer ein Untervektorraum von V .

4° Lin(Lin(A)) = Lin(A) , und A liegt in Lin(A) .

5° Für b aus V gilt Lin({b}) = Kb .

6° V erzeugt V .

Der Standardraum K^n

1.4. Sei K ein Körper

$$K^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{K}, i = 1,2,\ldots n \right\}$$

ist ein Vektorraum über K mit folgender Addition u. skalaren Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbf{K}$$

Der Standardraum K^n

Standardeinheitsvektoren

Die Vektoren e_1, e_2, …, e_n erzeugen den Raum K^n

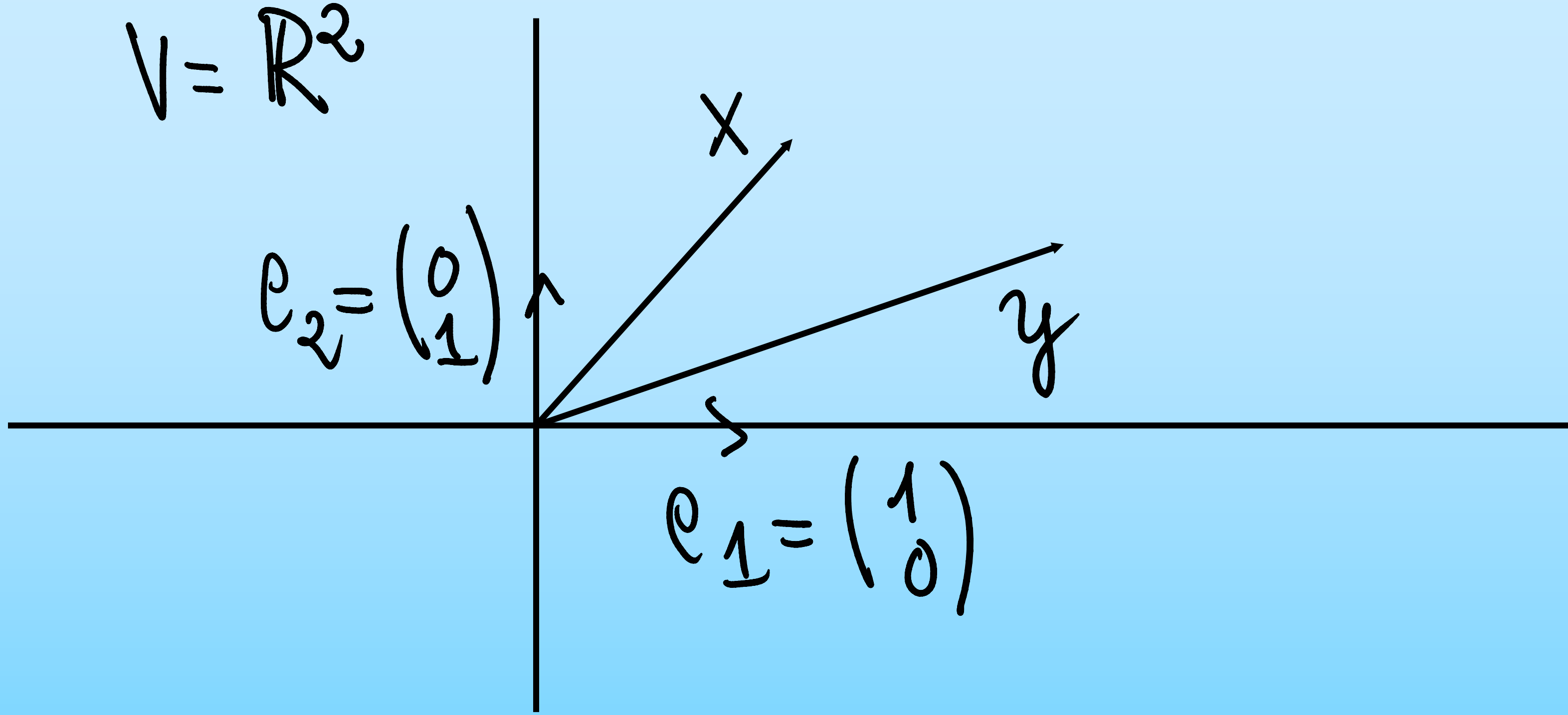
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} x_\mu e_\mu$$

Somit gilt: $Lin(\{e_1, \ldots, e_n\}) = K^n$

Bemerkung (geometrische Interpretation im $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2$



Beispiel: Der Raum der Polynome vom Grade ≤n

$$K_n[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n ; \alpha_i \in K\}$$

$$E = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Erzeugendensyst von $K_n[x]$

Elementare Theorie der Vektorräume
Lineare Unabhängigkeit

(13.1) Definition: V sei wieder ein K-Vektorraum.

1° Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ von Vektoren $\in V$ heißt **linear unabhängig**, wenn für alle Elemente $s_1, s_2, \ldots s_m \in K$ gilt:

$$s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_ma_m = 0 \rightarrow s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0 .$$

2° Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ von Vektoren $\in V$ heißt **linear abhängig**, wenn es Elemente $s_1, s_2, \ldots s_m \in K$ gibt mit:

- $s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_ma_m = 0$, und
- nicht alle s_k sind Null.

Offensichtlich ist eine endliche Menge genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig ist.

Elementare Theorie der Vektorräume

Lineare Unabhängigkeit

Bemerkungen, Beispiele: Sei V ein K-Vektorraum.

1° Die Standardeinheitsvektoren $\{e_1, e_2, \ldots , e_n\}$ aus K^n sind linear unabhängig.

2° Für jeden weiteren Vektor x aus K^n ist $\{x, e_1, e_2, \ldots , e_n\}$ linear abhängig.

3° $A = \{a\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn $a = 0$.

4° $A = \{a,b\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn a in Kb oder b in Ka liegt.

5° $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es einen Index k zwischen 1 und m gibt sowie Skalare $s_1, s_2, \ldots s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots , s_m$ aus K mit

$$a_k = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_{k-1} a_{k-1} + s_{k+1} a_{k+1} + \ldots + s_m a_m = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^{\mu=m} s_\mu a_\mu$$

Dh. a_k ist Linearkombination der übrigen Elemente aus A .

Elementare Theorie der Vektorräume
Lineare Unabhängigkeit

6^o Sei A aus V eine nichtleere endliche Menge. Dann

- A ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in A : a \in \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$
- A ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$

7^o $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ sei linear unabhängig, und für ein x sei die Menge $\{x, a_1, a_2, \ldots a_m\}$ linear abhängig.
Dann ist x Linearkombination der $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Lineare Algebra
Ausgangspunkt: Lösung linearer Gleichungssysteme

Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Definition 0.1: Ein *lineares Gleichungssystem* in n Unbestimmten und in m Gleichungen ist:

$$\begin{aligned}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\
a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Die a_j^i sind die *Koeffizienten* aus $\mathbb{R}$. Die b_j sind weitere Zahlen, auch die *Konstanten genannt*, und die x_i sind die *Unbestimmten*, bzw. die Unbekannten, die Veränderlichen.

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems werden zusammengefasst zu einer *Matrix:*

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^j & \cdots & a_1^n \\ a_i^1 & a_i^j & \cdots & a_i^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^j & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \uparrow \text{ j-te Spalte} & & \end{array} & \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n &= b_m \end{aligned}$$

Definition 0.2 Matrixoperation:

Eine Matrix A der obigen Form wirkt auf einen Spaltenvektor x auf die folgende Weise:

$$Ax := \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dadurch wird eine Abbildung definiert

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \to Ax$$

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ sind „Vektorräume“ und L_A ist eine „lineare“ Abbildung

Seien $A, B \in K^{m \times n}$; $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$

Dann definieren

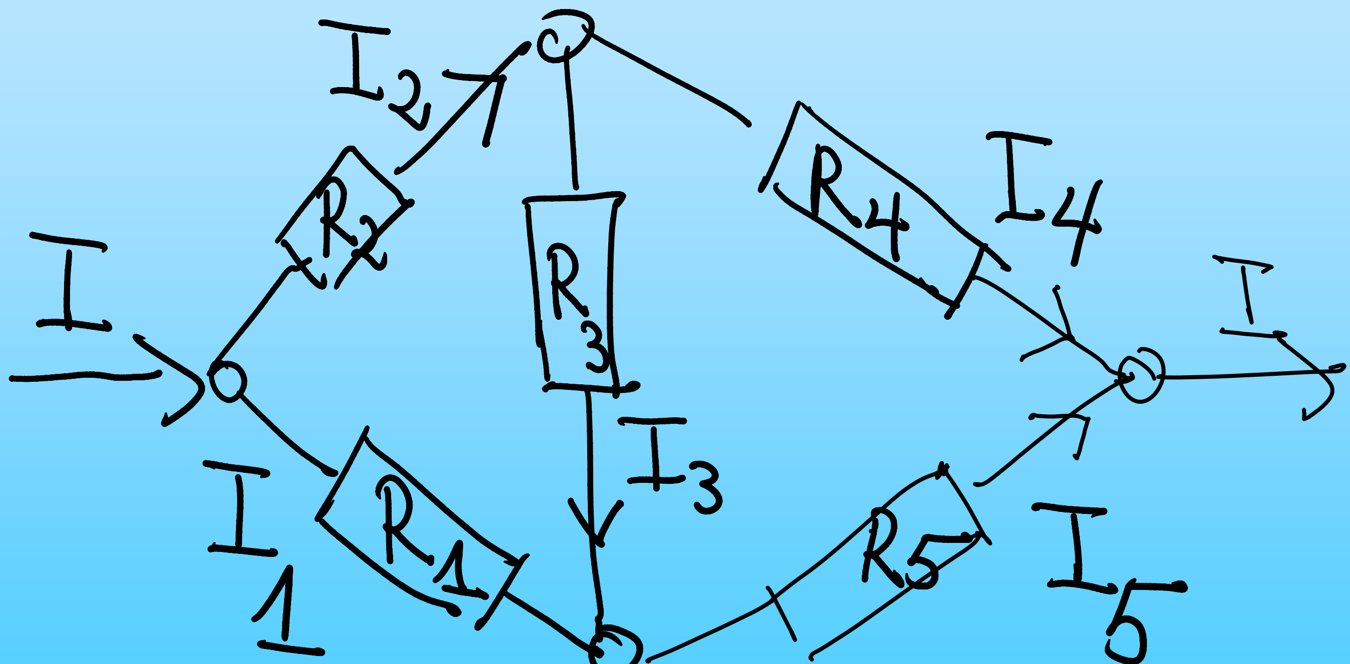
$$A + B := (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \text{ u.}$$

$$rA := (r\alpha_{ij}) \text{ eine Addition}$$

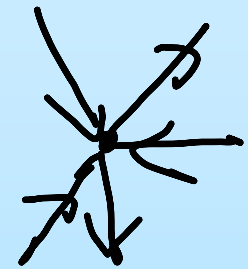
u. skalare Multiplikation auf $K^{m \times n}$.

Satz. Die Menge aller $m \times n$ - Matrizen ist ein Vektorraum bzgl. der oben angeg. Verknüpfungen.

Beispiel
1) Kirchhoffsche Gesetze



Knotenregel $\sum_{j=1}^{n} I_j = 0$



Maschenregel $\sum_{\text{Masche}} U_j = \sum_i R_i I_i = 0$

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= I \\
I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\
+I_3 - I_5 &= 0 \\
-R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 &= 0 \\
-R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_5 I_5 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & -R_5 \end{pmatrix}$$

Gesucht $I_1, .., I_5$ so dass

$$A \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$$