Gauß'sche Lösungsverfahren

geg.

$$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

1) $Ax = 0$ (homogene System)
Lösung wird in 2 Schritten durchgeführt

ⓐ Vorwärtselimination ($\to$ Zeilenstufenform)

ⓑ Rückwärtssubstitution

ⓐ (V)

$$M = \left(\begin{array}{cccccccc} \blacksquare & * & \cdots & & & & & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & & & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \blacksquare & * & \cdots & & * \\ & & \vdots & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & \blacksquare & * & * \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} m-r \end{array}$$

$Mx = 0$ äquivalent zu $Ax = 0$

ⓑ **Rückwärtssubstitution**

Beispiel

Sei
$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

Allgemein

Die zu den Spalten ohne $\blacksquare$-Stelle gehörenden Unbekannten sind die freien Variablen, sie werden der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ bezeichnet.

$$x_2 = \lambda_1 \qquad x_5 = \lambda_2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \\ -x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2x_3 + x_4 &= 4\lambda_2 \\ x_4 &= 3\lambda_2 \end{aligned}$$

$$x_4 = 3\lambda_2, \quad x_3 = \frac{1}{2}\lambda_2, \quad x_1 = 2\lambda_1 - 15{,}5\lambda_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0{,}5\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißt <u>allgemeine Lösung des homog. Systems</u>

<u>Spezielle Lösung</u>: z.B. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
x_1 - 4x_2 + 2x_3 \phantom{{}-5x_4} &= 0 \\
2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= 0 \\
3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\
x_2 - x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}
$$

$$x_3 = \lambda_1 \qquad x_4 = \lambda_2$$

$$x_2 = x_3 + x_4 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$x_1 = 4x_2 - 2x_3 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \implies$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ist allgemeine Lösung.

Def. Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen (also die Anzahl der $\blacksquare$-Stellen) in der mittels Gauß-Elimination erzielten Zeilenstufenmatrix M heißt <u>Rang von A</u> (Rang A).

<u>Satz.</u> "n - Rang$A$ Variable frei wählbar!"

a) Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat genau dann als einzige Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, wenn Rang$A = n$ (n Anzahl der Unbekannten)

b) Die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems enthält n - Rang$A$ freie Variable.

c) Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ($m < n$), dann besitzt $Ax = 0$ von Null verschiedene Lösungen.

Beweis

b) Es gibt $n - \text{Rang} A$ Spalten in Matrix M ohne ■-Stelle. Jede der zu diesen Spalten gehörenden Variablen ist „frei".

a) Aus b folgt: $n - \text{Rang} A = n - n = 0 \Rightarrow$
Es gibt keine freie Variable
$\Rightarrow$ Rückwärtssubstitution liefert
$x_n = 0, x_{n-1} = 0, \ldots, x_1 = 0$

c) $\text{Rang} A \leq m$ (trivial) und $m < n$
(Anzahl der Zeilen < Anzahl der Unbekannten)

$n - \text{Rang} A \geq n - m \geq 1$

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine freie Variable

Sei o.E.d.A $x_k = \lambda = 1$.

$x_1 = *, x_2 = *, \ldots, x_k = 1, x_{k+1} = *, \ldots, x_n = *$

2) <u>Das inhomogene lineare Gleichungssystem</u>

$$Ax = b$$

Lösungsweg:

(a) Vorwärtselimination an der erweiterten Matrix $(A|b)$

(b) Lösbarkeitsentscheidung.

(c) Rückwärtssubstitution.

(a)
$$(M|d) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \blacksquare & * & & \cdots & & * & \delta_1 \\ 0 & 0 & \blacksquare & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \blacksquare \; * & * & \delta_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \; \cdots & 0 & \delta_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \; \cdots & 0 & \delta_m \end{array}\right)$$

(b) <u>Lösbarkeitsentscheidung</u>

$Mx = d$ nicht lösbar (d.h. $Ax = b$ nicht lösbar) $\Longleftrightarrow$ wenn eine der Zahlen $\delta_{r+1}, \ldots, \delta_m \neq 0$ ist.

o.E.d.A $\delta_{r+1} \neq 0$

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \delta_{r+1} \neq 0 \;\lightning$$

Im Falle $\delta_{r+1} = \cdots = \delta_m = 0$ berechnet man die Lösung

mittels
(c) Rückwärtssubstitution

Satz a) Lösbarkeitstest

Das inhomogene Gleichungssystem $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt

$$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}A.$$

b) Struktur der Lösungsmenge

Ist $Ax=b$ lösbar dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form $v = v_0 + \mathcal{U}$ mit einer spez. Lösung v_0 und der allgem. Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax=0$

c) Anzahl der freien Variablen

Ist $Ax=b$ lösbar, dann enthält die allgem. Lösung (n-Rang$A$) freie Variable.

Beweis

a) $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0 \Rightarrow$ das die durch A und $(A \mid b)$ erzielten Zeilen-Stufenmatrizen die gleiche Anzahl von ■-Stellen besitzen, d.h.

$$\text{Rang}\,A = \text{Rang}\,(A \mid b).$$

b) $$Ax = \begin{pmatrix} \sum x_i \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \sum x_i \alpha_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$L_A : K^n \longrightarrow K^m$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto L_A(x) = Ax$$

$$L_A(x+y) = L_A(x) + L_A(y)$$

$$L_A(r x) = r\, L_A(x)$$

b) u Lösung von $Ax = 0$

v_0 " " $Ax = b$ (spez.)

$$A(v_0 + u) = A(v_0) + A(u) = A(v_0) + 0 = b$$

v, v' Lösungen von $Ax = b$

$$\underset{\parallel}{A(v - v')} = A(v) - A(v') = b - b = 0$$

$$A(v + (-1)v')$$

$\Rightarrow v - v' = u$ Lösung des homog. Systems.

c) $\text{Rang}\,A = \text{Rang}\,(A \mid b)$

$n - \text{Rang}\,A$ $\square$