Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Elementare Theorie der Vektorräume
Lineare Gleichungssysteme,
Basen

M.B. Wischnewsky

09. 05. 2006

Pseudocode zur Lösung linearer Gleichungsssysteme

Definition der rekursiven Fkt Gauss(i,j) **mit Zeilen- und Spaltenindex als Parameter.**

i=j=1.

Gauss(i,j):

falls i=Zeilenzahl oder j > Spaltenzahl:
Ende.
Falls $a_{ij} = 0$:
suche $a_{kj} \neq 0$, k > i, wenn es keines gibt: Gauss(i,j+1),**Ende.**
vertausche Zeile k mit Zeile i

Ziehe für alle k > i von der k-ten Zeile das (a_{kj}/a_{ij})-fache der i-ten Zeile ab.

Gauss(i+1,j+1), **Ende.**

Fundamentallemma:

Satz (**Anzahl der freien Variablen**

1. Ist $Ax=b$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung (n-RangA)-freie Variable.
2. Die allgemeine Lösung $Ax=0$ enthält (n-RangA)-freie Variable (n = Anzahl der Unbekannten x_i).

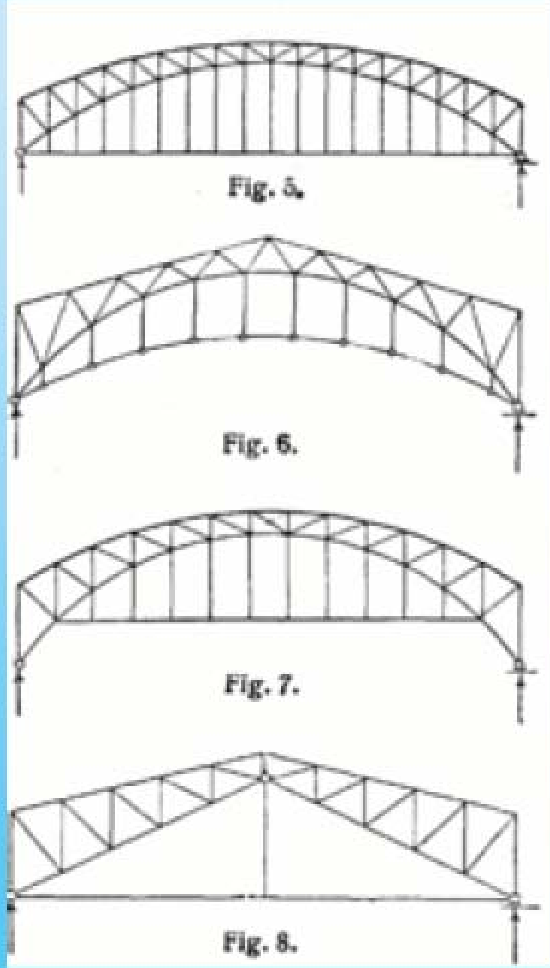
Korollar (Fundamentallemma): K sei Körper.
Ist die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Unbekannten n ($m<n$), dann besitzt $Ax=0$ von 0 verschiedene Lösungen

Lineare Gleichungssysteme
Beispiele

Physik	**[Stromkreise],**
Chemie	**[Stöchiometrie],**
Biologie	**[lineare Populationsmodelle],**
Vektorgeometrie	**[Lageaufgaben, lineare Vektorgleichungen],**
Wirtschaft	**[Materialfluss, Wirtschafts-modelle]).**
Bauingenieurwissenschaften	**[Fachwerkskonstruktionen]**

Fachwerkskonstruktionen

Als Fachwerk bezeichnet man nach den Zwischenräumen, die *Fach* oder *Gefach* heißen, **eine Konstruktion**, in der nur Stäbe auf Druck oder Zug und nicht auf Biegung beansprucht werden.



Der Ausdehnung nach unterscheiden wir ein ***ebenes*** **und ein *räumliches Fachwerk.***

.

Fachwerke finden ihre Anwendung:

- im Gebäudebau – insbesondere als Fachwerkhaus und im Hallenbau; *siehe auch* Hochbau und Tiefbau.
- im Brückenbau.
- in Kran- und Mastenbau.
- im Gerüstbau
- im Maschinenbau
- in der Veranstaltungstechnik

Gleichgewichtsbedingungen für ein Fachwerk

Kräfte greifen nur in den Knoten an.
Druckkräfte in Stäben sind negativ, Zugkräfte positiv.
Gewichtskräfte des Fachwerks bleiben unbeücksichtigt.
Die Belastungskräfte sind in Pfeilrichtung positiv zu zählen.

Gleichgewichtsbedingungen für ein Fachwerk

1) Die Summe aller auf einen Knoten wirkenden Kräfte ist Null.

2) Die Summe aller in einem Stab wirkenden Kräfte ist Null.

Knotenpunktverfahren

Mit dem *Knotenpunktverfahren* lassen sich die Stabkräfte durch Aufstellen eines Gleichungssystems ermitteln.

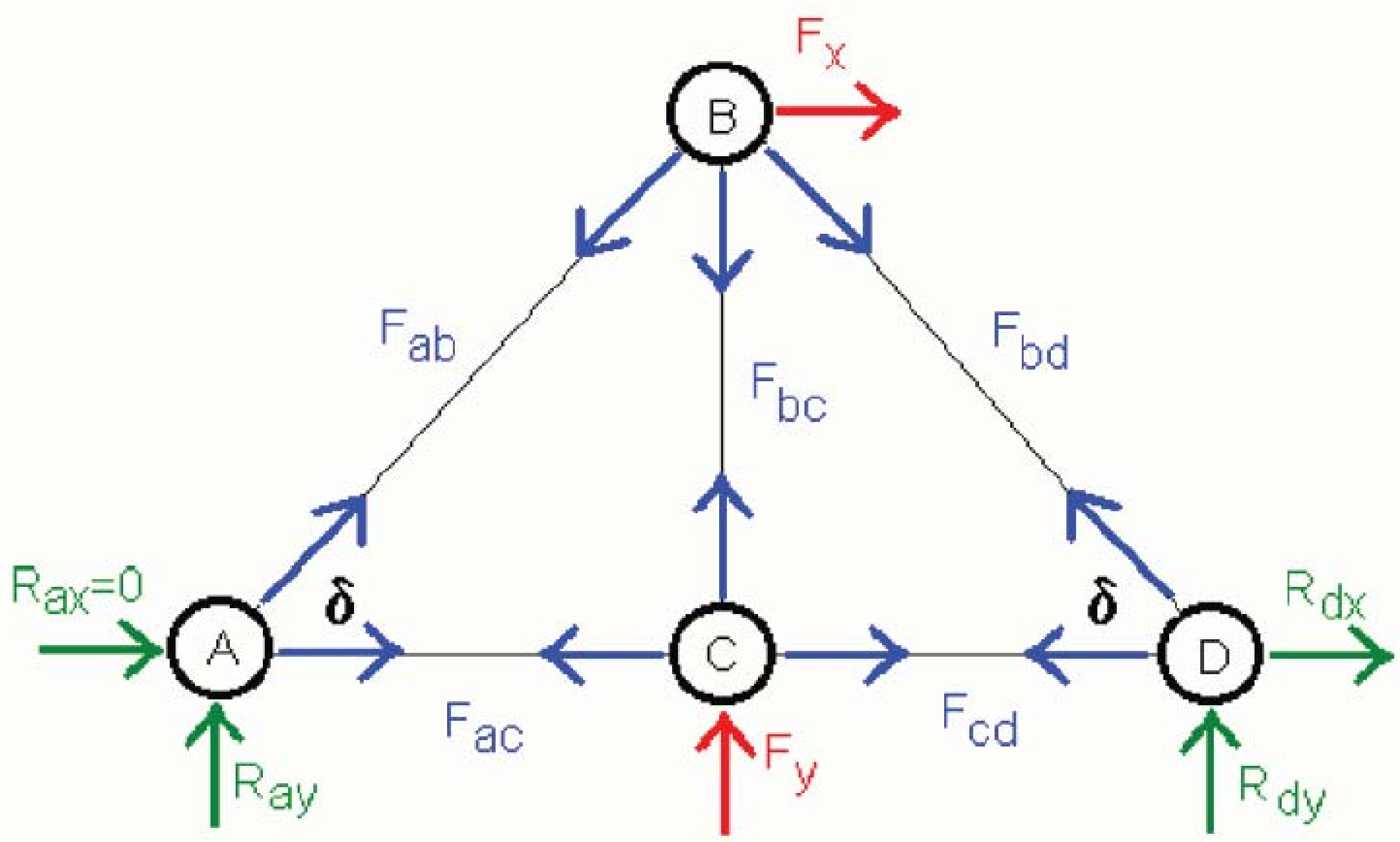
Für jeden Knoten werden die zwei Gleichgewichtsbedingungen - die Summe der Kräfte in x- und in y-Richtung muss Null sein - aufgeschrieben. Dadurch ergibt sich ein Gleichungssystem, das bei statischer Bestimmtheit des Fachwerks gelöst werden kann.

Im dreidimensionalen Fall werden jeweils drei Gleichungen aufgestellt.

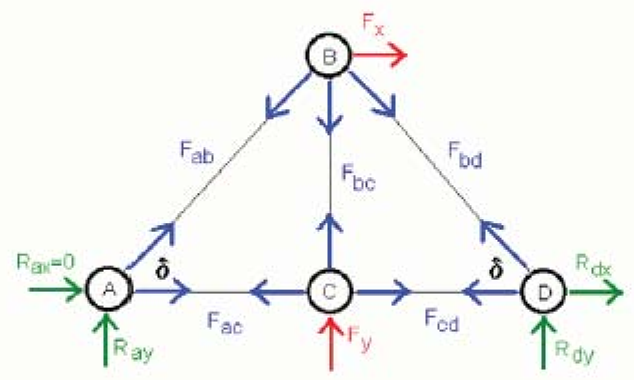
Bei einfachen Fachwerken genügt es, die Auflagerkräfte mit dem Erstarrungsprinzip zu berechnen und sich dann entlang der Knoten 'durchzuhangeln'

Beispiel: Ebenes Fachwerk (1)

Fachwerk



Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes



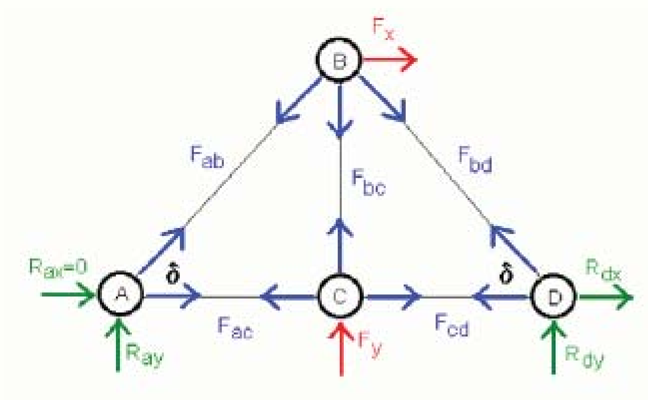
Knoten A:
x: $F_{ab}*\cos(\delta) + F_{ac} = 0$
y: $F_{ab}*\sin(\delta) + R_{ay} = 0$

Knoten B:
x: $- F_{ab}*\cos(\delta) + F_{bd}*\cos(\delta) = -F_x$
y: $- F_{ab}*\sin(\delta) - F_{bc} - F_{bd}*\sin(\delta) = 0$

Knoten C:
x: $- F_{ac} + F_{cd} = 0$
y: $F_{bc} = -F_y$

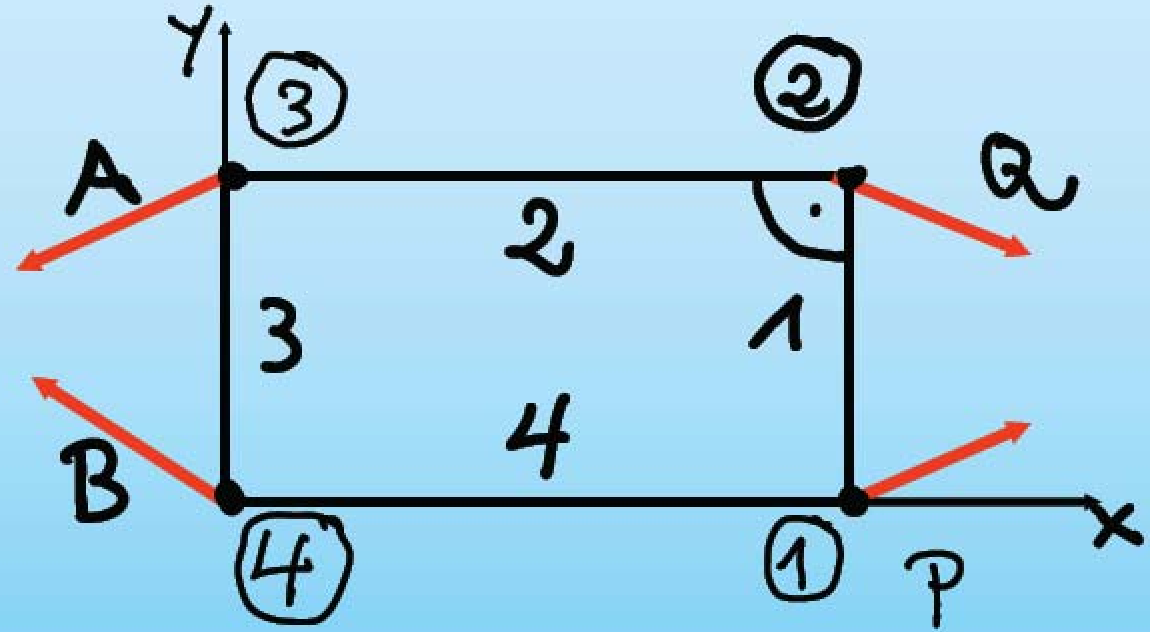
Knoten D:
x: $- F_{cd} - F_{bd}*\cos(\delta) + R_{dx} = 0$
y: $F_{bd}*\sin(\delta) + R = 0$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes



$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\cos(\delta) & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\
\sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\
-\cos(\delta) & 0 & 0 & \cos(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-F_x} \\
-\sin(\delta) & 0 & -1 & -\sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\
0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\
0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-F_y} \\
0 & 0 & 0 & -\cos(\delta) & -1 & 0 & +1 & 0 & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 0 & \sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & +1 & \mathbf{0}
\end{array}\right)
$$

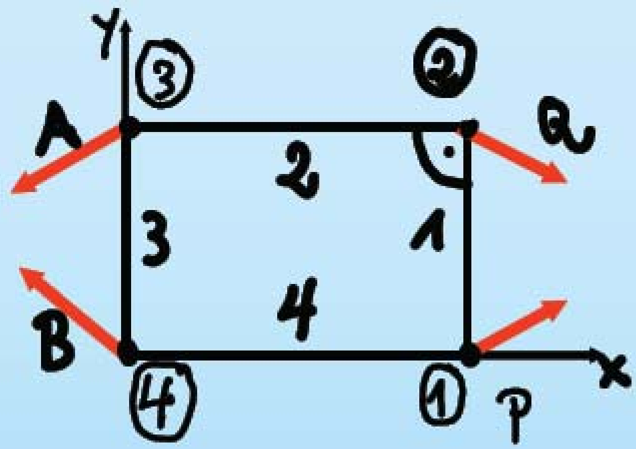
Beispiel: Ebenes Fachwerk (2)



Auf das skizzierte ebene Fachwerk mit 4 Stäben und 4 Knoten
wirken 2 Kräfte P und Q.
Sie rufen in jedem Stabende eine Reaktion in Richtung des Stabes hervor.

In den festen Auflagern 3 und 4 sind A und B die Reaktionen

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes



Konten ①: $s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P = 0$

Knoten ②: $s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Q = 0$

Knoten ③: $s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A = 0$

Knoten ④: $s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + B = 0$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes

$$
\text{d.h.}\quad \left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_x \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_y \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_x \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_y \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

mit dem unbekannten Vektor $x=(S_1,S_2,S_3,S_4,A_x,A_y,B_x,B_y)$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes

Gauss-Elimination liefert

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_y \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_x \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_x \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -Q_x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -P_x \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_y+Q_y
\end{array}\right)$$

$\rightarrow$ Rang (A) = 7

Fachwerk

Fall1: $P_y+Q_y \neq 0$ → keine Lösung: Stabwerk kinematisch unbestimmt.

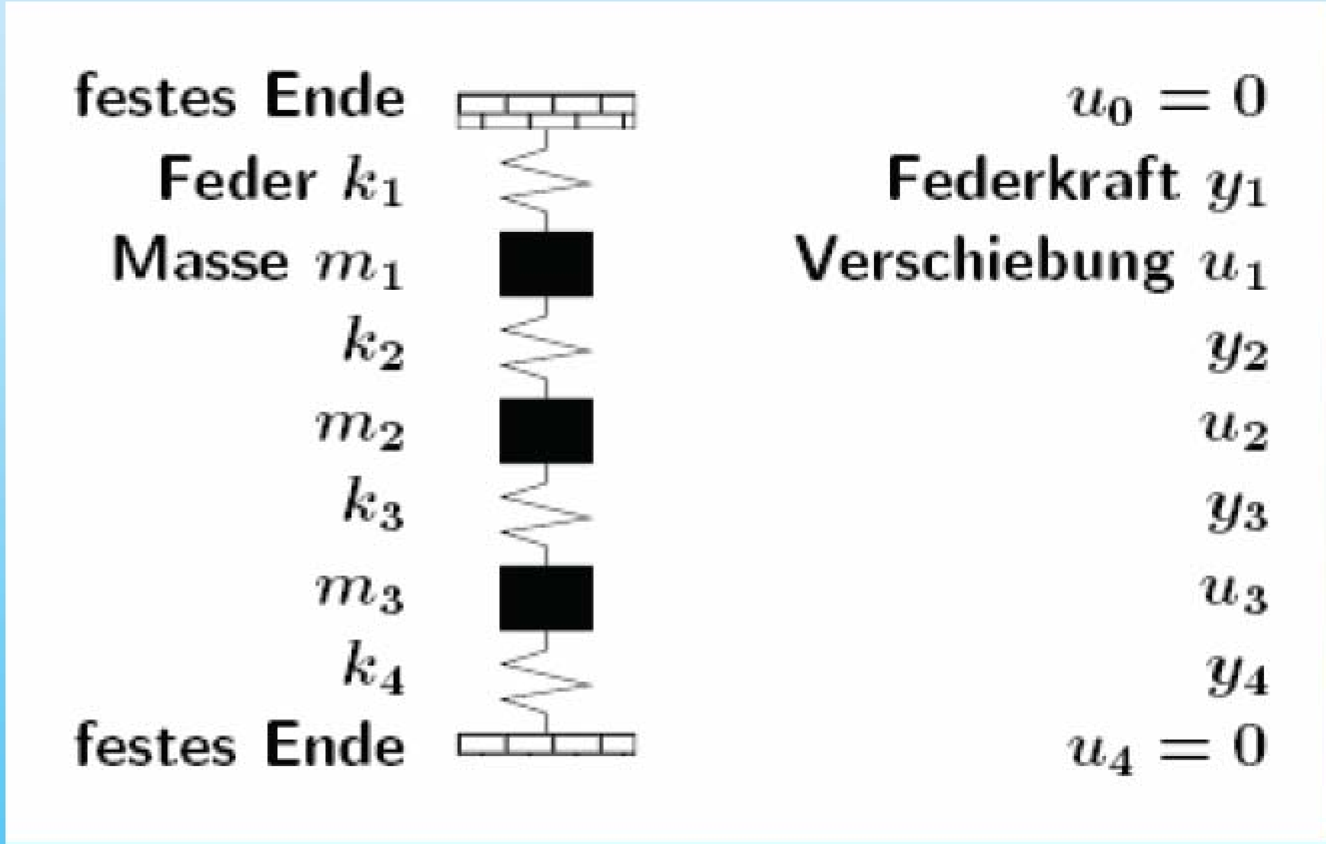
Fall2: $P_y+Q_y=0$ → Rang(A)=Rang(A,b).

Das Stabwerk ist statisch unbestimmt!

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_x \\ 0 \\ -P_x \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_y \\ -Q_x \\ 0 \\ P_x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A_x, B_x, S_1, S_2 und S_4 sind eindeutig bestimmt.
S_3 und A_y können aus P und Q nicht eindeutig bestimmt werden.

Beispiel: Feder-Masse-System



Beispiel: Feder-Masse-System

Bezeichnungen

$u = (u_1; u_2; u_3)$ = Verschiebungen der Massen

$y = (y_1; y_2; y_3; y_4)$ = Kräfte in den Federn

$e = (e_1; e_2; e_3; e_4)$ = Ausdehnungen der Federn

$f = (f_1; f_2; f_3)$ = Gravitationskräfte

Aufstellen der Gesetze

Ausdehnung der Feder = Differenz der Verschiebungen

Hookesches Gesetz

Kräftegleichgewicht

Beispiel: Feder-Masse-System

Ausdehnung der Feder = Differenz der Verschiebungen

Erste Feder: $e_1 =$ u_1 da $u_0 = 0$

Zweite Feder: $e_2 =$ $u_2 - u_1$

Dritte Feder: $e_3 =$ $u_3 - u_2$

Vierte Feder: $e_4 =$ $-u_3$ da $u_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

oder kurz: $e = A(u)$

Beispiel: Feder-Masse-System

Hookesches Gesetz

Die Verlängerung e einer Feder ist proportional zur wirkenden Kraft y.

y ~ e

oder:

y = k·e

k = Federkonstante

Erste Feder:	$y_1 = k_1\, e_1$
Zweite Feder:	$y_2 = k_2\, e_2$
Dritte Feder:	$y_3 = k_3\, e_3$
Vierte Feder:	$y_4 = k_4$ e4

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

oder kurz: y = K (e)

Elementare Theorie der Vektorräume

Lineare Unabhängigkeit

Definition: V sei wieder ein K-Vektorraum.

1° Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ von Vektoren $\in V$

heißt **linear unabhängig**, wenn für alle Elemente $s_1, s_2, \ldots s_m \in K$ gilt: $s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_ma_m = 0 \rightarrow s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$.

2° Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ von Vektoren $\in V$

heißt **linear abhängig**, wenn es Elemente $s_1, s_2, \ldots s_m \in K$ gibt mit:

- $s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_ma_m = 0$, und
- nicht alle s_k sind Null.

Offensichtlich ist eine endliche Menge genau dann linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig ist.

3° Eine nichtleere **Teilmenge A von V ist linear unabhängig,** wenn jede endliche Teilmenge von A linear unabhängig ist.

Elementare Theorie der Vektorräume
Lineare Unabhängigkeit

Bemerkungen, Beispiele: Sei V ein K-Vektorraum.

1° Die Standardeinheitsvektoren $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ aus K^n sind linear unabhängig.

2° Für jeden weiteren Vektor x aus K^n ist $\{x, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ linear abhängig.

3° $A = \{a\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn $a = 0$.

4° $A = \{a,b\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn a in Kb oder b in Ka liegt.

5° $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es einen Index k zwischen 1 und m gibt sowie Skalare $s_1, s_2, \ldots s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_m$ aus K mit

$$a_k = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_{k-1} a_{k-1} + s_{k+1} a_{k+1} + \ldots + s_m a_m = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^{\mu=m} s_\mu a_\mu$$

Dh. a_k ist Linearkombination der übrigen Elemente aus A .

Elementare Theorie der Vektorräume
Lineare Unabhängigkeit

6^o Sei A aus V eine nichtleere endliche Menge. Dann

- A ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in A : a \in \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$
- A ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$

7^o $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ sei linear unabhängig, und für ein x sei die Menge $\{x, a_1, a_2, \ldots a_m\}$ linear abhängig.
Dann ist x Linearkombination der $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Bemerkungen, Beispiele

6° Sei A aus V eine nichtleere endliche Menge. Dann

- A ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists a \in A : a \in \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$
- A ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$

7° $\{a_1, a_2, \dots a_m\}$ sei linear unabhängig, und für ein x sei die Menge $\{x, a_1, a_2, \dots a_m\}$ linear abhängig.
Dann ist x Linearkombination der $a_1, a_2, \dots a_m$.

Definition: Sei A eine Teilmenge im K-Vektorraum V .

1° A ist *linear abh ängig* $:\Leftrightarrow \exists a \in A : a \in \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$

2° A ist *linear una bhängig* $:\Leftrightarrow$ A ist nicht linear abhängig
$:\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{a\})$

Kap III Basis und Dimension

(3.1) Definition: V sei wieder ein K-Vektorraum.
Eine Menge B von Vektoren aus V heißt *Basis von* V, wenn

- B ist Erzeugendensystem von V , und
- B ist linear unabhängig.

(3.2) Beispiele:

1^o $\{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ aus K^n ist Basis von K^n:

2^o Auch $\{e_1+e_2, e_1-e_2, e_3 \dots , e_n\}$ ist eine Basis von K^n, wenn in K die Gleichung $2x = 0$ nur die Lösung $x = 0$ hat, z.B. K aus $\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{Q}\}$.

3^o Aber für x aus K^n ist $\{x, e_1, e_2, \dots , e_n\}$ keine Basis von K^n,.

4^o Die leere Menge ist Basis von $\{0\}$.