Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Einführung u.
Wiederholung wichtiger
Grundbegriffe

M.B. Wischnewsky

12.05.2006

Def. <u>Begriff Basis</u>

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraumes $V \neq \{0\}$ über K nennt man eine Basis von V, wenn gilt:

(B1) B ist ein <u>Erzeugendensystem von</u> V

d.h. $\forall_{x \in V} \; \exists_{\substack{b_1, \ldots, b_n \in B \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K}} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

(B2) B ist <u>linear unabhängig</u>

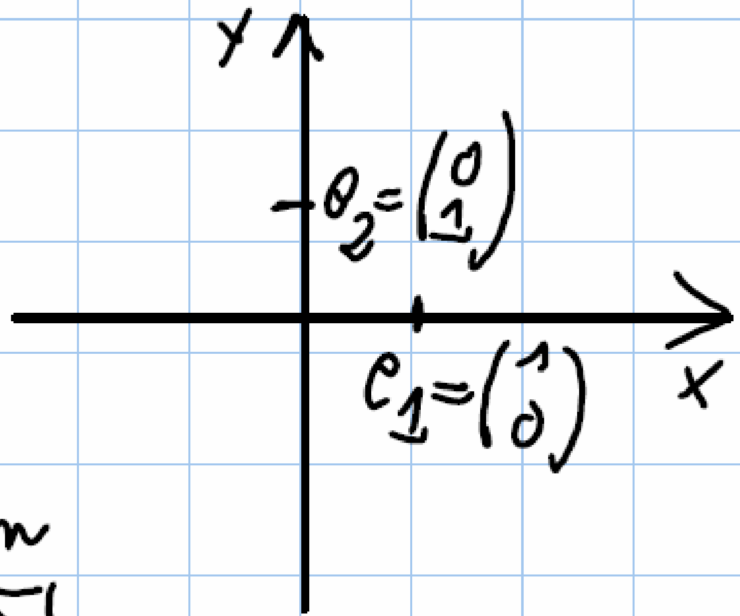
d.h. $\forall_{b_1, \ldots, b_n \in B} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

$i = 1, \ldots, n$

Beisp.

$V = K^n \qquad B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis des K^n

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Stelle}$$



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

Eindeutigkeits-Lemma. Sei B Basis von $V \neq \{0\}$.
Dann lässt sich jedes Element $x \in V$ <u>eindeutig</u> als Linearkombination von endlich vielen Elementen aus B schreiben.

Beweis Sei

o.E.d.A.: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \Rightarrow$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) b_i$$

$\overset{BZ}{\Longrightarrow}$ $\lambda_i - \mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$

d.h. $\lambda_i = \mu_i$

Probleme

1) Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?
2) Haben je zwei Basen gleich viele Elemente?
3) Wie kann man alle Basen beschreiben?

Satz Basis-Satz für endl. erzeugte Vektorräume. V über K.

a) Sind die Elemente $a_1, \dots, a_r$ aus V linear unabhängig, dann ist entweder $\{a_1, \dots, a_r\}$ Basis von V oder es gibt Elemente $u_1, \dots, u_\ell$, sodass
$$\{a_1, \dots, a_r, u_1, \dots, u_\ell\} \text{ Basis}$$
von V ist.

b) V besitzt eine endliche Basis.

c) Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.

Beweis

(a) Sei $V = Lin(w_1, \dots, w_k)$ nach Vorauss.

$$\Rightarrow V = Lin(a_1, \dots, a_r, w_1, \dots, w_k)$$

Nun lassen wir alle die w_i weg, die zur Erzeugung dieser linearen Hülle nicht benötigt werden.

Das sind entweder alle w_i; in diesem Fall gilt bereits: $V = Lin(a_1, \dots, a_r)$

$$\Rightarrow B = \{a_1, \dots, a_r\} \text{ Basis von } V.$$

oder es gilt - wenn wir die verbleibenden w_i mit $u_1, \dots, u_l$ bezeichnen -

$$V = Lin(a_1, \dots, a_r, u_1, \dots, u_l)$$

Behpt $B = \{a_1, \dots, a_r, u_1, \dots, u_l\}$ Basis von V ist.

B1 erfüllt, da $V = Lin(a_1, \dots, u_\ell)$.
z. zeigen B2

Annahme: B ist linear abhängig

$$(*) \quad \boxed{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_\ell u_\ell = 0}$$

und nicht alle α_i, β_i sind gleich Null.

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der $a_1, \dots, a_r$ muß wenigstens ein β_j von Null verschieden sein.

$$\beta_j u_j = \sum_{i=1}^{r} -\alpha_i a_i + \sum_{i=1, i \neq j}^{\ell} -\beta_i u_i \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\beta_j} : \quad u_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{-\alpha_i}{\beta_j} a_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\ell} \frac{-\beta_i}{\beta_j} u_i \quad \lightning^{*}$$

$$\Rightarrow B = \{a_1, \dots, a_r, u_1, \dots, u_\ell\}$$

linear unabhängig

* Widerspruch zur Vorraussetzung:
keines der u_i ist Linearkombination der übrigen Elemente.

(b) Jeder endl. erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

$0 \neq a \in V \Rightarrow a$ linear unabhängig

$\Rightarrow$ Es gibt $u_1, \dots, u_\ell$

$B = \{a, u_1, \dots, u_\ell\}$ Basis.

(c) Basislänge = Anzahl der Elemente einer Basis.

Fundamentallemma $\Rightarrow$

Ist $B \subseteq V$ Basis u. $|B| = n$, dann sind je $n+1$ Vektoren aus V linear abhängig

Sei $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine weitere Basis von V. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |C| = m \leq n \\ \text{Rollentausch: } |B| = n \leq m \end{array}\right\} |B| = |C|$$

Dimension von V: $\dim_K V := |B|$ B Basis

Beisp.

1) $V = K^n$ $\dim K^n = n$

2) $V = P_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i ; \alpha_i \in K \right\}$

$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ Basis des P_n

$\dim P_n = n + 1.$

geg $f: V \longrightarrow W \quad x \mapsto f(x)$ linear

L1) $\forall_{x,y \in V} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

L2) $\forall_{x \in V} \; \forall_{\lambda \in K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\Rightarrow \boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)}$$

Satz. geg Vektorraum V über K u. $B \subseteq V$ Basis.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, "\exists! f^* \text{ linear}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & W \end{tikzcd}$$

$\forall$ Abbildung f

Jede Abbildung $f: B \longrightarrow W$ in einen Vektorraum W lässt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung $f^*: V \longrightarrow W$ fortsetzen.

Beweis geg $f: B \longrightarrow W$
$b \mapsto f(b)$

$f^*: V \longrightarrow W$ sei wie folgt definiert

$V \ni x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ (B Basis von V)

$f^*(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \in W$

$$\left.\begin{array}{l} x = \sum \lambda_i b_i \\ y = \sum \mu_i b_i \end{array}\right\} f^*(x+y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) f(b_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)}_{= f^*(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(b_i)}_{= f^*(y)}$$

2) Eindeutigkeit

Seien $f^*, g^*: V \to W$ $f^*_{|B} = g^*_{|B} = f$.

Sei $x \in V$ $x = \sum \lambda_i b_i$

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^*(b_i) = \sum^{n} \lambda_i g^*(b_i)$$

$$= g^*\left(\sum \lambda_i b_i\right) = g^*(x) \square$$