

Satz Sei V ein Vektorraum über K . Dann gelten

- ① V besitzt eine Basis
- ② Sei $B \subseteq V$ eine Basis

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\cong} & V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists! f^* \text{ linear} \\ \forall \text{ Abb. } f \\ f^*|_B = f \end{array}$$

Jede Abbildung $f: B \rightarrow W$ in einen Vektorraum W lässt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung fortsetzen

$$\text{Sei } V \ni x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$$

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i) \in W$$

Bemerkung

Satz

Sei X eine Menge. Dann gelten

① Es gibt einen Vektorraum $F(X)$ mit Basis X .

②

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\subseteq} & F(X) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

$\forall \text{ Abb. } f$ $\exists! f^* \text{ linear}$

Satz Seien V, W Vektorräume über K
u. $\dim V = \dim W$
 $V \cong W$.

Def. $f: V \longrightarrow W$ linear

① f Monomorphismus $\Leftrightarrow f$ injektiv

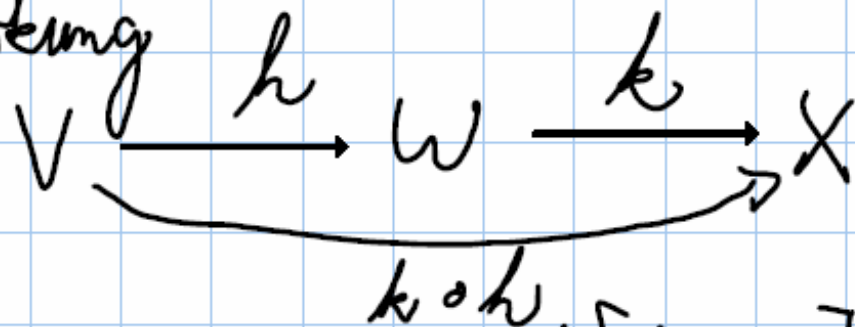
② f Epimorphismus $\Leftrightarrow f$ surjektiv

③ f Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ bijektiv

④ Sei $V = W$
 f Automorphismus $\Leftrightarrow f$ Isomorph

Lemma $f: V \rightarrow W$ ist ein Isomorphismus
 $\Leftrightarrow \exists g: W \rightarrow V$ linear mit
 $f \circ g = \text{id}_W \quad g \circ f = \text{id}_V$

Bemerkung



$$\begin{aligned} x \in V \quad k \circ h(x) &:= k[h(x)] \\ - k \circ h(x+y) &= k[h(x+y)] = k[h(x) + h(y)] \\ &= k[h(x)] + k[h(y)] = k \circ h(x) + k \circ h(y) \\ - k \circ h(\lambda x) &= k[h(\lambda x)] = \\ &= k[\lambda h(x)] = \lambda k[h(x)] \\ &= \lambda k \circ h(x) \quad \square \end{aligned}$$

Beweis

1) $f: V \longrightarrow W$ injektiv, surjektiv.

$B \subseteq V$ Basis $\Rightarrow \{f(b); b \in B\}$
Basis von W

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis

$C := \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$

$$0 = \sum_i \lambda_i f(b_i) \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda_i = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$\sum_i \lambda_i f(b_i) = f\left(\sum_i \lambda_i b_i\right) = 0$$

Es gilt $f(0) = 0$

$$(f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0)$$

$$f \text{ injektiv} \Rightarrow f(0) = f\left(\sum_i \lambda_i b_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i b_i = 0$$

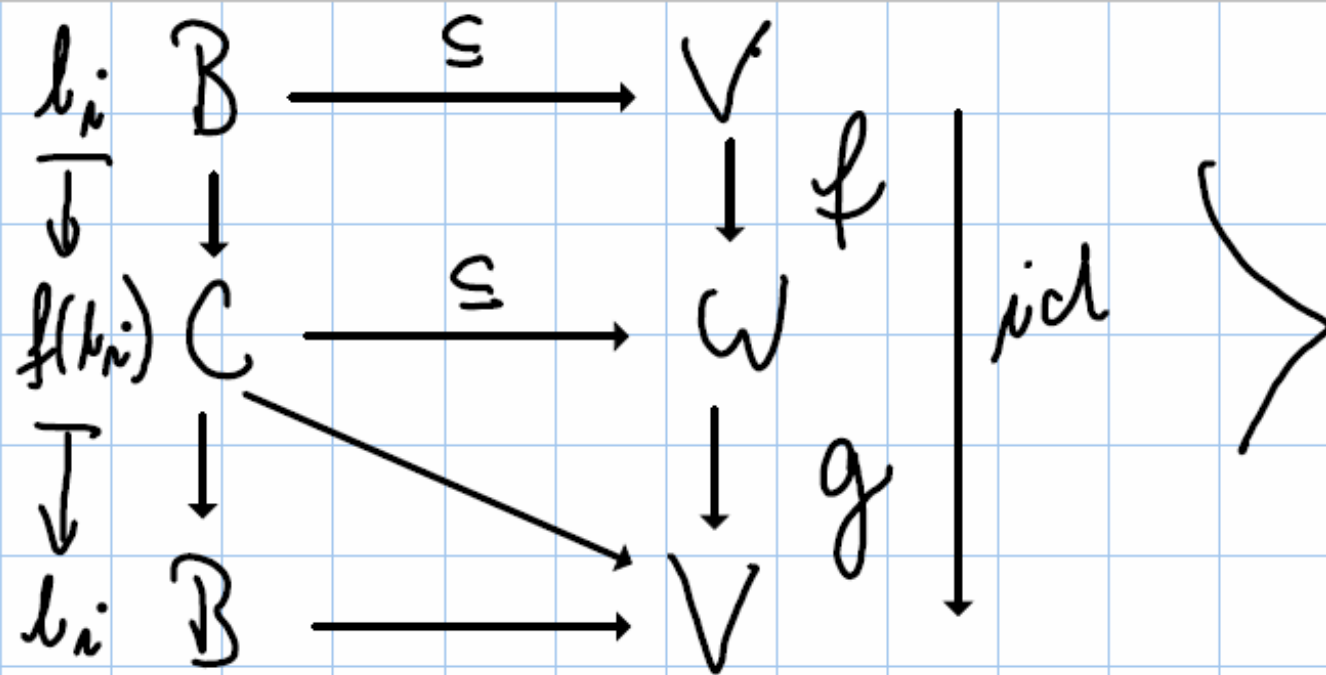
$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i=1, \dots, n \quad \square$$

— Sei $y \in W \stackrel{f \text{ surjektiv}}{\Rightarrow} \exists x \in V \quad f(x) = y$

$$B \subseteq V \text{ Basis} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \Rightarrow y = f(x) =$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$$

$$\Rightarrow C \text{ Basis von } W.$$



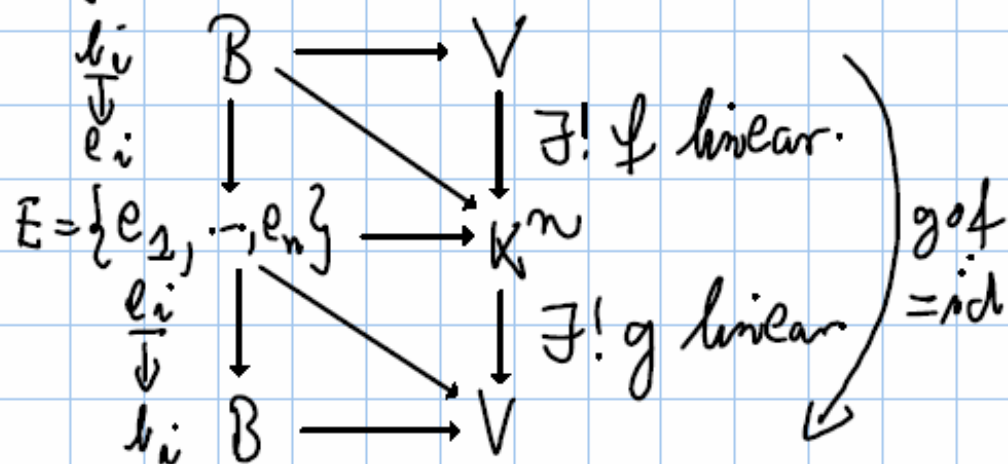
$g \circ f = id_V$
 Rollentausch $f \circ g = id_W$

Satz Sei V Vektorr. über K , $n, n \in \mathbb{N}$
 $\dim_K V = n \Leftrightarrow V \cong K^n$

Beweis

$\dim_K V = n$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V



$\Rightarrow V \cong K^n$

Sei $V \cong K^n \Rightarrow \dim V = n$
 $f: K^n \rightarrow V$ Isomorph

$E = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$
 \subset

\subset Basis von $V \Rightarrow \dim V = n$

Satz Sei $B \subseteq V$ Basis mit $|B| = n$

Dann sind je m Vektoren $w_1, \dots, w_m \in V$,
 $m > n$, linear abhängig.

Beweis z.z. es gibt Linearkomb. der w_i

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = 0 \quad \text{mit } \lambda_j \neq 0 \quad \text{für wenigstens ein } j$$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis

$$w_1 = \alpha_{11} b_1 + \dots + \alpha_{n1} b_n$$

$$w_i = \alpha_{1i} b_1 + \dots + \alpha_{ni} b_n$$

$$w_m = \alpha_{1m} b_1 + \dots + \alpha_{nm} b_n$$

$$\alpha_{11} \lambda_1 + \alpha_{12} \lambda_2 + \dots + \alpha_{1m} \lambda_m = 0$$

$$\alpha_{21} \lambda_1 + \alpha_{22} \lambda_2 + \dots + \alpha_{2m} \lambda_m = 0$$

\vdots

$$\alpha_{n1} \lambda_1 + \alpha_{n2} \lambda_2 + \dots + \alpha_{nm} \lambda_m = 0$$

Da $m > n$ gibt es eine nichttriviale

Lösung $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{k1} \lambda_k \right) b_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \lambda_k \right) b_n = 0$$

$$V \xrightarrow{f} W \quad \dim V = n; \dim W = m$$

$B \in V$ Basis $C \in W$ Basis von W

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ h_B \downarrow \cong & = & \downarrow \cong h_C \\ K^n & \xrightarrow{A_{f,B,C}} & K^m \end{array}$$

$$h_B: V \xrightarrow{\cong} K^n$$

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \mapsto h_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$h_C: W \xrightarrow{\cong} K^m$$

$$y = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i \mapsto h_C(y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$f(b_i) = \alpha_{1i} c_1 + \dots + \alpha_{mi} c_m$$

$$A_{f,B,C} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{f,B,C}: K^n \xrightarrow{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}} K^m$$

$$A_{f,B,C}(x) = A_{f,B,C} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n x_i a_i \quad a_i \in K^m$$

$$A_{f,B,C} \circ h_B = h_C \circ f.$$

$$b_i \in B$$

$$A_{f,B,C}[h_B(b_i)] = A_{f,B,C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i$$

$$h_C f(b_i) = h_C \left[\sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k \right] =$$

$$* = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} = a_i$$

$$A_{f,B,C} \circ h_B = h_C \circ f.$$

$$A_{f,B,C} = h_C \circ f \circ h_B^{-1}$$

$$f = h_C^{-1} \circ A_{f,B,C} \circ h_B$$