Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Einführung u.
Wiederholung wichtiger
Grundbegriffe

M.B. Wischnewsky

12.05.2006

Satz Sei V Vektorraum über Körper K.

(1) V besitzt Basis

(2) Sei $B \subseteq V$ Basis

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, "\exists!\, f^* \text{ linear}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & W \end{tikzcd}$$

$\forall$ Abb. f

$$f^*|_B = f.$$

Satz V, W endlich dimensional.

$$\dim V = \dim W \iff V \cong W \text{ (isomorph)}$$

Folg $\dim V = n \iff V \cong K^n$

Bemerk. Kategorie Vektorräume

Jeder Vektorraum ist durch die "Anzahl" der Basiselemente bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

$$f^*: V \longrightarrow W$$

$x \in V$ $\quad f^*(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$ falls

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$B \subseteq V$ Basis
$C \subseteq W$
$\dim V = n$
$\dim W = m$

$$\begin{tikzcd} b_i \arrow[d, mapsto] \\ e_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_B"'] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[d, "h_C"] \\ K^n \arrow[r, "A_{f,B,C}"] & K^m \end{tikzcd}$$

$x \in V$ $\quad h_B(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$

h_B Koordinatenabbildung

$h_B(x)$ Koordinatenvektor von x.

Die Elemente x_i heißen Koordinaten von x bezgl. Basis B.

$$\boxed{f(b_i) = \alpha_{1i} c_1 + \cdots + \alpha_{mi} c_m}$$

$$A_{f,B,C} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} & \cdot & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mi} & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{f,B,C} \circ h_B = h_C \circ f}$$

Die Elemente α_{ij} sind durch f, B u. C eindeutig bestimmt.

$h_B \quad V \longrightarrow K^n$ Isomorphismus.

(Bemerk. $h: X \longrightarrow Y$ Isomorphismus

$\Leftrightarrow \exists\, h^{-1}: Y \longrightarrow X$ mit

$$h^{-1} \circ h = id_X$$

$$h \circ h^{-1} = id_Y.$$

$$\begin{tikzcd}
b_i \arrow[d] & B \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] \arrow[dr] & V \arrow[d, "\exists!\, h_B"] \arrow[dd, bend left=60, "id"] \\
e_i \arrow[d] & E \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] \arrow[dr] & K^n \arrow[d, "\exists!\, h_B^{-1}"] \\
b_i & B \arrow[r, "\subseteq"] & V
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad h_B^{-1} \circ h_B = id_V.$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_{f,B,C} &= h_C \circ f \circ h_B^{-1} \\ f &= h_C^{-1} \circ A_{f,B,C} \circ h_B \end{aligned}}$$

Spezialfall. $V = W = K^n$

$B = C = E = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_E"'] \arrow[dr, phantom, "="] & K^n \arrow[d, "h_E"] \\ K^n \arrow[r, "A_{f,E,E}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

$$f(e_i) = \alpha_{1i} e_1 + \dots + \alpha_{ni} e_n$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{f,E,E} = A_{f,E} = \left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)}$$

Beisp. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad f(\bar{x}) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+2z \\ z \end{pmatrix} \text{ linear}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$A_{f,E} = \left(f(e_1), f(e_2), f(e_3) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} \quad \square$$

Bemerk. $A \in K^{m \times n}$

a_i: Spaltenvektoren der Matrix

$$A = (\alpha_{ij}) = (a_1, \ldots, a_n)$$

$$x \in K^n \quad \boxed{Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n}$$

Def. Sei $f: V \longrightarrow W$ linear.

(1) $\ker(f) := \{x \in V;\ f(x) = 0\}$

Kern von f.

(2) $\mathrm{Bi}(f) := \{f(x);\ x \in V\}$

Bild von f.

<u>Lemma</u> $\ker(f)$ u. $\mathrm{Bi}(f)$ sind Unterräume von V bzw. W.

Beweis.

$\ker(f) \subseteq V$ ist Untervektorr.

1) $x, y \in \ker(f) \Rightarrow x+y \in \ker(f)$

$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0$

2) $x \in \ker(f) \Rightarrow \lambda x \in \ker(f)$ $\lambda \in K$ beliebig

$f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$

<u>Satz</u> V, W endl. dim. $f: V \longrightarrow W$ linear

$$\boxed{\dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Bi}(f))}$$

Beweis. Sei $u_1, \dots, u_k$ Basis von $\operatorname{Ker}(f)$

und $u_1, \dots, u_k, b_1, \dots, b_\ell$ Basis von V

Beh. $f(b_1), \dots, f(b_\ell)$ Basis von $\operatorname{Bi}(f)$

1) $\operatorname{Bi}(f) \ni y = f(x) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_\ell b_\ell)$

$$= \overbrace{f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k)}^{0} + \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_\ell f(b_\ell)$$

$\Rightarrow f(b_1), \dots, f(b_\ell)$ Erzeugendensystem von $\operatorname{Bi}(f)$

2) $\underset{?}{\alpha_1} f(b_1) + \dots + \alpha_\ell f(b_\ell) = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

$\alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_\ell f(b_\ell) =$

$f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_\ell b_\ell) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_\ell b_\ell \in \mathrm{Ker}(f)$

$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_\ell b_\ell = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_\ell b_\ell - \beta_1 u_1 \dots - \beta_k u_k = 0$

linear unabh.

$\Rightarrow \alpha_i = 0, \ \beta_j = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

$j = 1, \dots, k.$

$\Rightarrow \dim V = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Bi}(f))$

da $\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{Basis von Ker}(f)}, b_1, \dots, b_\ell$ Basis von V

$\Updownarrow$

$\ell = \dim \mathrm{Bi}(f)$

Bemerkung. Sei $f: V \longrightarrow W$ linear. Dann gelten

① f ist surjektiv $\Longleftrightarrow \operatorname{Bi}(f) = W$

② f ist injektiv $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

$\Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(f) = 0$

Beweis

① nach Definition

② f injektiv $\Longleftrightarrow \forall_{x,x' \in V} \; f(x) = f(x') = 0 \Rightarrow x = x'$

$\Longleftrightarrow \forall_{x \in V} \; f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

Satz $A \in K^{n \times n}$ $A: K^n \longrightarrow K^n$

$A = (a_1, \dots, a_n)$

$Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$

Dann sind äquivalent

1. $Ax = b$ ist für jede rechte Seite b lösbar.
2. $Ax = 0$ ist nur trivial lösbar (einzige Lösung $x = 0$)
3. $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar

Beweis $A \quad K^n \longrightarrow K^n$

Es gilt $\dim K^n = n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Bi}(A))$

① $Ax = b$ lösbar für jede rechte Seite.

$\Leftrightarrow A$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Bi}(A) = K^n$

$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Bi}(A)) = n$

$\Leftrightarrow (\mathrm{Ker}(A)) = 0$

Bemerkung) $V = \{0\}$ $\dim V = 0$

$B = \emptyset$ Basis von V.

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$

② $Ax = 0$ ist nur trivial lösbar.

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\} = \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$

Bemerkung)

$h: X \longrightarrow Y$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(h) = \{0\}$

③ ① $\Leftrightarrow$ ②, d.h. A ist surjektiv $\Leftrightarrow$ A ist injektiv

$\Rightarrow A$ ist bijektiv $\square$