$f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

① f Monomorphismus $\Leftrightarrow$ f injektiv

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

② f Epimorphismus $\Leftrightarrow$ f surjektiv

$\Leftrightarrow \operatorname{Bi}(f) = W$.

Satz $f: V \longrightarrow W$ linear, V, W endl. dim.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Bi}(f) = \dim V}$$

$$A: K^n \longrightarrow K^n \qquad A \in K^{n \times n}$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \qquad A = (a_1, \dots, a_n)$$

$$\left.\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \operatorname{Bi}(A) = \dim K^n = n\right\}$$

$$\dim \operatorname{Bi}(A) = n \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A) = 0$$

<u>Satz</u> $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent

1. $Ax = b$ ist für jede rechte $b \in K^n$ lösbar, d.h. A ist surjektiv.
2. $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar. d.h. $x = 0$ ist einzige Lösung ($\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$)
3. $Ax = b$ ist für jede rechte Seite <u>eindeutig</u> lösbar, d.h. A ist bijektiv.
4. Die Spalten von A sind linear unabhängig.

<u>Beweis von 4</u>

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_n \text{ linear unabhängig.}$$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_B"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_C"'] & X \arrow[d, "h_D"] \\
K^n \arrow[r, "A_{f,B,C}"'] \arrow[rr, bend right, "A_{g \circ f, B, D}"'] & K^m \arrow[r, "A_{g,C,D}"'] & K^p
\end{tikzcd}
$$

B Basis von V

C " W

D " X

$x \in V$ $\quad g \circ f(x) := g[f(x)]$

$$\boxed{A_{g \circ f, B, D} \overset{?}{=} A_{g,C,D} * A_{f,B,C}}$$

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in K.$

$A \quad K^n \longrightarrow K$

Zeilenvektor $z := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Spaltenvektor $s := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

<u>Zeile mal Spalte</u>

$$\underset{\substack{\parallel \\ z}}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \underset{\substack{\parallel \\ s}}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \\ \beta_n \end{pmatrix}} := \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

$$= z \cdot s$$

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad z_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$$

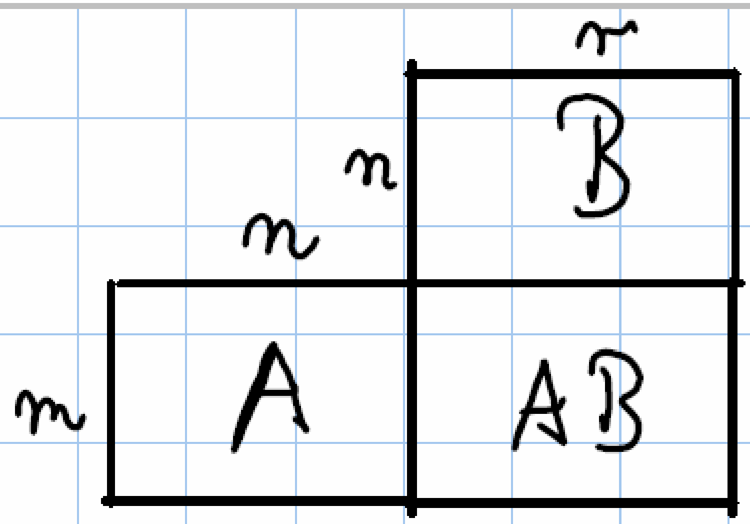
$$A = (\alpha_{ij}) = (s_1, \dots, s_n) \quad s_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

$$A \in K^{m \times n} \qquad B \in K^{n \times r}$$

$$K^r \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & \beta_{11} \cdot & \beta_{1j} \cdot & \beta_{1r} \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & \beta_{n1} & \beta_{nj} & \beta_{nr} \\ \hline
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & & & \\
\alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{in} & & c_{ij} & \\
\alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & & &
\end{array}$$

$$c_{ij} = \alpha_{i1} \beta_{1j} + \alpha_{i2} \beta_{2j} + \cdots + \alpha_{in} \beta_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj}$$



	s_1	s_j	s_r
z_1	$z_1 s_1$		$z_1 s_r$
z_i	$z_i s_1$	$z_i s_j$	
z_m	$z_m s_1$		$z_m s_r$

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = b_1$$

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n = b_i$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{array}{c|c} & x \\ \hline z_1 & z_1 x \\ \vdots & \vdots \\ z_m & z_m x \end{array}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} z_1 x \\ \vdots \\ z_m x \end{pmatrix}$$

① Die Transponierte einer Matrix

$$A = (\alpha_{ij}) \in K^{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & 2 & & n \end{array}$$

$$A^T := \begin{pmatrix} \boxed{\alpha_{11} \quad \alpha_{21} \quad \cdots \quad \alpha_{m1}} \\ \boxed{\alpha_{12} \quad \alpha_{22} \quad \cdots \quad \alpha_{m2}} \\ \vdots \\ \boxed{\alpha_{1n} \quad \alpha_{2n} \quad \cdots \quad \alpha_{mn}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \\ \leftarrow n \end{array}$$

Rechenregeln

a) $(A+B)^T = A^T + B^T \qquad A, B \in K^{m \times n}$

b) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

c) $(A^T)^T = A$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

Spezialfälle

1) <u>Einheitsmatrix</u>

$$E = (e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$

2) Matrix $A \in K^{n \times n}$: $A: K^n \to K^n$

A <u>invertierbar</u> $\Leftrightarrow \exists B \in K^{n \times n}$ mit

$$AB = BA = E$$

Bemerk. B eindeutig.

Sei $C \in K^{n \times n}$ $AC = CA = E$

$$B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$$

<u>Inverse zu</u> A: A^{-1}

Satz A ist <u>invertierbar</u> $\Leftrightarrow$ Die Spalten von A sind linear unabhängig.

$$GL(n, K) := \{ A \in K^{n \times n} ; A \text{ ist invertierbar} \}$$

<u>"allgemeine lineare Gruppe"</u>

Produkte u. Quotienten von Vektorräumen

1) Produkte

1.1. Vorbemerkung

V, W Vektorräume über K.

$$V \times W = \{ (v, w) ; v \in V, w \in W \}$$

ist Vektorraum bzgl.

$$x = (x_V, x_W) \quad y = (y_V, y_W)$$

$$x + y = (x_V + y_V, x_W + y_W)$$

$$\lambda x = (\lambda x_V, \lambda x_W)$$

Def. geg. Familie $(V_i, i \in I)$ von Vektorräumen über K.

Ein Vektorraum X zusammen mit linearen Abbildung

$$p_i : X \longrightarrow V_i \qquad i \in I$$

heißt <u>Produkt der Vektorräume</u> V_i $:\Leftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
V_i & & X \arrow[ll, "p_i"'] \\
 & & \\
 & & W \arrow[uull, "f_i"] \arrow[uu, "\exists!\, f^* \text{ linear}"'] \arrow[uul, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

$\forall$ lin. Abb. f_i
$i \in I$

$$\boxed{p_i \circ f^* = f_i \qquad i \in I}$$

Beisp. geg $V_1, \dots, V_n$ Vektorr. über K.

$$X = V_1 \times \dots \times V_n =$$
$$= \{(v_1, \dots, v_n) ; v_i \in V_i, i = 1, \dots\}$$

$$\begin{tikzcd}
V_i & V_1 \times \dots \times V_n \arrow[l, "p_i"'] \\
 & W \arrow[ul, "\text{linear } f_i"] \arrow[u, "\exists!\, f^*"']
\end{tikzcd}$$

$$v_i \mapsfrom (v_1, \dots, v_n)$$

$$f^*(w) := (f_1(w), \dots, f_n(w))$$