Quotientenräume

Satz Jeder Unterraum eindl. dim Vektorraumes V ist endl. dim. u. im Fall $U \neq V$ gilt

$$\dim U < \dim V$$

Beweis. Sei $U \neq \{0\}$ u. $(u_1, \dots, u_r)$ ein System mit größtmöglicher Anzahl linear unabhängiger Vektoren.
Es gilt $r \leq n$ (falls $\dim V = n$), da $u_1, \dots, u_r$ auch in V linear unabhängig

$u \in U \Rightarrow u_1, \dots, u_r, u$ linear abhängig.

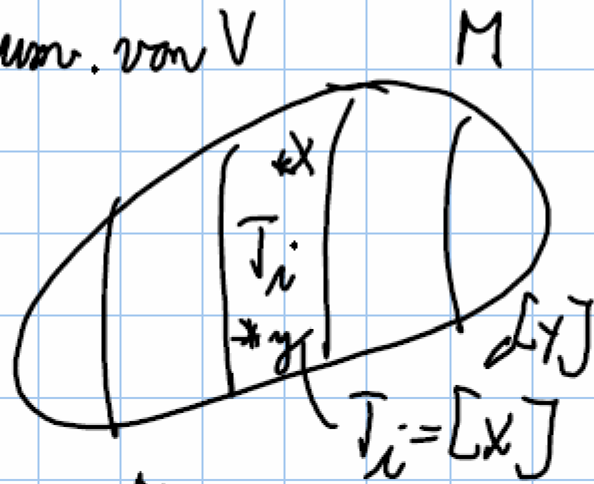
$\Rightarrow u_1, \dots, u_r$ Erzeugendensy. von U

$U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \Rightarrow$

$\dim U = r \leq n = \dim V$. $\square$

Sei $\mathcal{U} \subseteq V$ Unterraum von V

Äquivalenzrelation



Def. $x, x' \in V$

$$\boxed{x' \underset{\mathcal{U}}{\sim} x \overset{}{\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}} x' - x \in \mathcal{U}}$$

$x, y \in M$

$$x \sim y \Longleftrightarrow \underset{T_i \subseteq M}{\exists} \; x, y \in T_i$$

A1) $x \underset{\mathcal{U}}{\sim} x$

$$x - x = 0 \in \mathcal{U}$$

A2 $x \underset{\mathcal{U}}{\sim} y \Rightarrow y \underset{\mathcal{U}}{\sim} x$

$$x - y \in \mathcal{U} \Rightarrow -(x-y) \in \mathcal{U} \Rightarrow \underset{y \sim_{\mathcal{U}} x}{y - x \in \mathcal{U}} \Rightarrow$$

A3 $x \sim y$ u. $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$$x - y \in \mathcal{U} \qquad y - z \in \mathcal{U}$$

$$(x-y) + (y-z) \in \mathcal{U} \Rightarrow x - z \in \mathcal{U}$$

Äquivalenzklassen

$$[x] = \{x' \in V;\ x' \sim x\} =$$

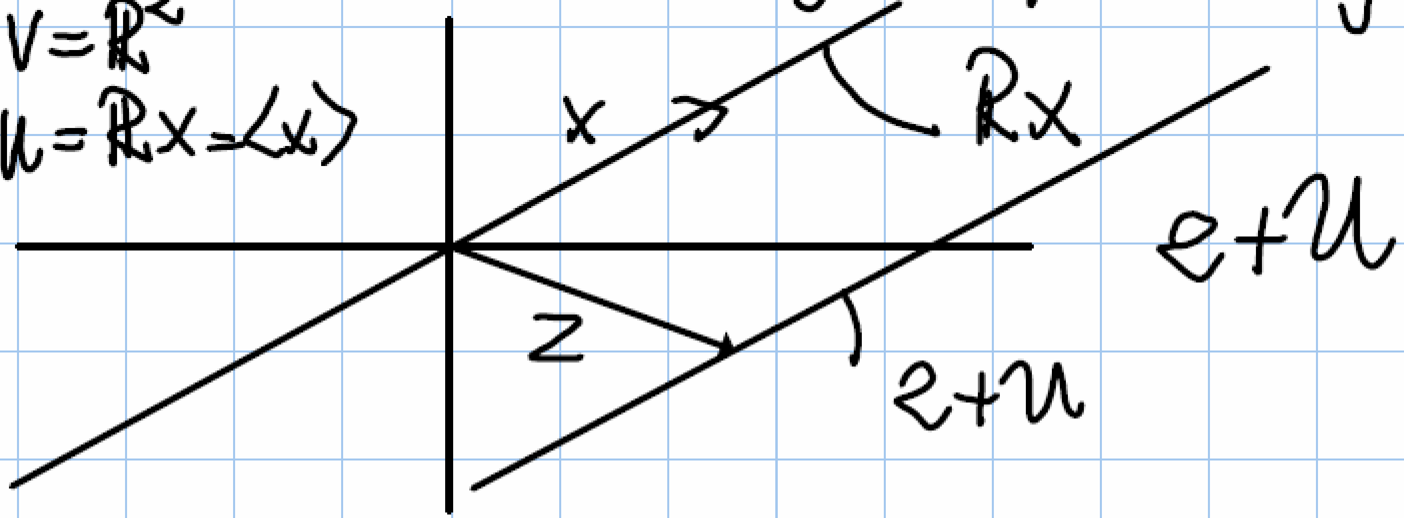
$$\{x' \in V;\ x' - x \in \mathcal{U}\} =$$

$$\{x' \in V;\ \exists_{u \in \mathcal{U}}\ x' - x = u\} = \{x' \in V;\ \exists_{u \in \mathcal{U}}\ x' = x + u\}$$

$$= x + \mathcal{U} = \{x + u;\ u \in \mathcal{U}\}$$

$V = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}x = \langle x \rangle$



$V/\mathcal{U} := \{x+\mathcal{U};\ x \in V\}$ Quotientenraum von V nach $\mathcal{U}$

$$(x+\mathcal{U})+(y+\mathcal{U}) := x+y+\mathcal{U}$$

$$\lambda(x+\mathcal{U}) := \lambda x+\mathcal{U}$$

$$x+\mathcal{U} = x'+\mathcal{U} \qquad y+\mathcal{U} = y'+\mathcal{U}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x' \sim x \qquad\qquad y' \sim y$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x' = x+u;\ u \in \mathcal{U} \qquad y' = y+u';\ u' \in \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned} x'+y'+\mathcal{U} &= x+u+y+u'+\mathcal{U} \\ &= x+y+u+u'+\mathcal{U} = \\ &= x+y+\mathcal{U} \end{aligned}$$

$$x' \sim x \qquad \lambda x'+\mathcal{U} = \lambda x+\mathcal{U}.$$

$$\Updownarrow \qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$x' = x+u \qquad \lambda x+\lambda u+\mathcal{U} = \lambda x+\mathcal{U} \qquad \square$$

$\Rightarrow$ $V/\mathcal{U}$ ist Vektorraum

Satz $\quad \varrho: V \longrightarrow V/\mathcal{U} \quad x \mapsto x+\mathcal{U}$

ist ein Epimorphismus

Beweis $\quad \varrho(x+y) = \varrho(x)+\varrho(y)$

$\qquad \varrho(\lambda x) = \lambda\varrho(x)$

$$\begin{aligned} \varrho(x+y) &= x+y+\mathcal{U} = x+\mathcal{U}+y+\mathcal{U} \\ &= \varrho(x)+\varrho(y) \end{aligned}$$

$$\varrho(\lambda x) = \lambda x+\mathcal{U} = \lambda(x+\mathcal{U}) = \lambda\varrho(x)$$

Bemerk. $\quad \mathcal{U} = 0+\mathcal{U}$ ist Nullelement in $V/\mathcal{U}$.

Satz (Homomorphiesatz)

Sei $f: V \longrightarrow W$ lineare Abb.

$$\ker(f) := \{x \in V;\ f(x) = 0\}$$

1) $$\boxed{V/\ker(f) \cong \operatorname{Bi}(f)}$$

2)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "="] & W \\ V/\ker(f) \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Epi e

m Mono.

Beweis $m: V/\ker(f) \longrightarrow W$

$$x+\ker(f) \longmapsto f(x)$$

(i) $x+\ker(f) = x'+\ker(f) \Leftrightarrow$

$$x' = x+n\,;\ n \in \ker(f)$$

$$m(x'+\ker(f)) = f(x') = f(x+n) =$$

$$= f(x) + \underbrace{f(n)}_{\substack{\| \\ 0,\ \text{da } n \in \ker(f)}} = f(x)$$

(ii) m injektiv

$$m(x+\ker(f)) = m(y+\ker(f)) \overset{?}{\Longrightarrow} x+\ker(f) = y+\ker(f)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x)-f(y) = 0^{*)}$$

$$\underset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow} f(x-y) = 0 \Rightarrow x-y \in \ker(f)$$

* $f(x)-f(y) = f(x)+f(-y) = f(x-y)$.

$\Rightarrow$ $x \sim y$ d.h. $x+\ker(f) = y+\ker(f)$

$$m: V/\ker(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bi}(f) \quad \text{surj.}$$

$$x+\ker(f) \mapsto f(x)$$

$$y \in \mathrm{Bi}(f) \Rightarrow \underset{x \in V}{\exists}\ f(x) = y$$

Sei $x+\ker(f) \Rightarrow m(x+\ker(f)) = f(x) = y.$ $\square$

Folgerung V endl. dim.

$f: V \longrightarrow W$ linear

$$\dim V/\ker(f) = \dim V - \dim\ker(f)$$

Beweis $\dim V = \dim\ker(f) + \dim \operatorname{Bi}(f)$

$$\dim V/\ker(f) = \dim \operatorname{Bi}(f) = \dim V - \dim\ker(f)$$

Folgerung V endl. dim. $U \subseteq V$ Unterraum

$$\boxed{\dim V/U = \dim V - \dim U}$$

Beweis $e: V \longrightarrow V/U \quad x \mapsto x + U$

$\ker(e) = U \Longrightarrow$ Behpt.

Euklidische Vektorräume

Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Def. $\sigma: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \sigma(x,y)$

σ heißt positiv definite, symmetrische Bilinearform $\Leftrightarrow$

1) $\forall_{x \in V} \; \sigma(x,x) \geq 0$ u. $\sigma(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ "positiv definit"

2) $\forall_{x,y \in V} \; \sigma(x,y) = \sigma(y,x)$

3) $\sigma(x,y)$ ist linear in jedem Argument "Bilinear"

(V, σ) heißt Euklidischer Vektorraum

Beispiele

1) $V = \mathbb{R}^n$

$\sigma(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$(\mathbb{R}^n, \sigma)$ Euklidisch

2) $V = C_0(I, \mathbb{R})$ Vektorraum der stetigen Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ Intv. "$[a,b]$"

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

$\sigma(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$

Def. <u>Länge von $x \in V$</u>

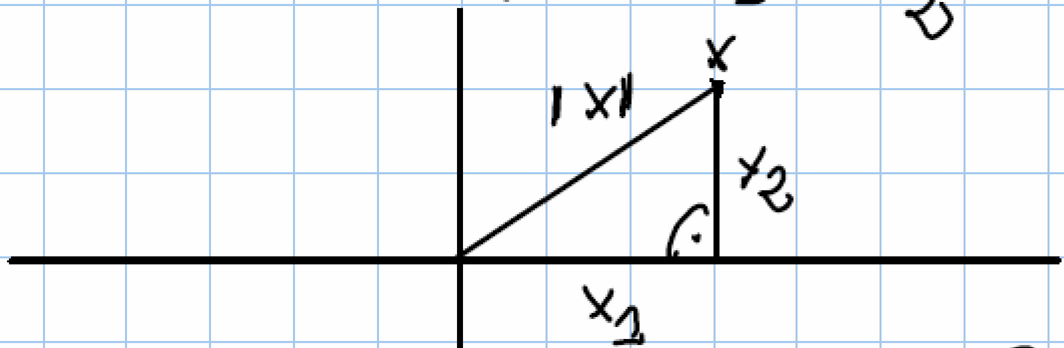
$$\|x\| := \sqrt{\sigma(x,x)}$$

<u>**Beispiel.**</u>

$V = \mathbb{R}^2 \qquad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\sigma(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

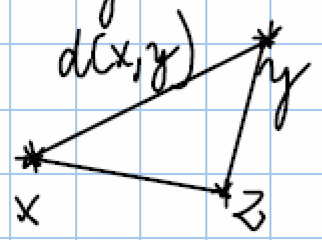
$$\|x\| = \sqrt{\sigma(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Bemerkung) <u>Abstand</u> M Menge



1) $d(x,y) \geq 0$ u
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(M, d) <u>metrischer Raum</u>

Def. Sei (V, σ) euklisch.

$$d(x,y) := \|x - y\|$$