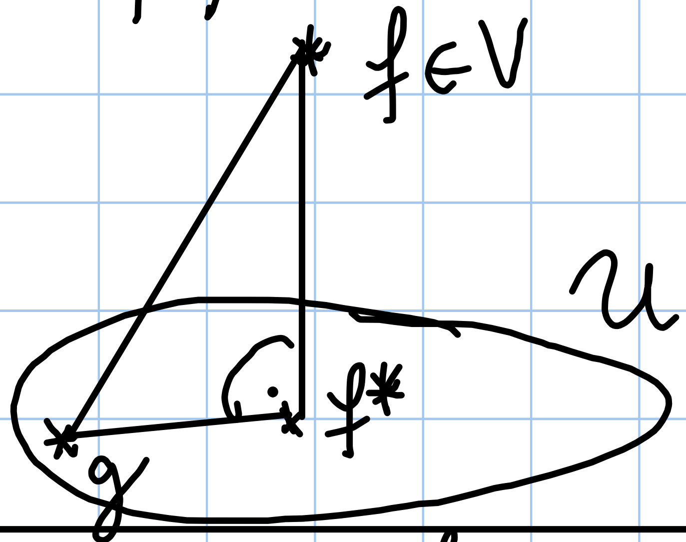
Diskrete Approximation

1) Beste Approximation in Eukl. VR

(V, σ) Eukl. VR



Def. $f^* \in \mathcal{U}$ beste Approximation von f in $\mathcal{U}$

$$\Leftrightarrow \forall_{g \in \mathcal{U}} \ \|f^* - f\| \le \|g - f\|$$

Beste Approximation def. eine lineare Abbildung

$$P: V \longrightarrow U = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$
$$f \longmapsto P(f) := f^*$$

O.E.d.A. $g_1, \dots, g_n$ ONS $\Rightarrow$

$$\boxed{f^* = \sum_{k=1}^{n} \sigma(f, g_k)\, g_k}$$

Bilinearität von σ $\Rightarrow$ P lineare Abb.

<u>Folgerung</u> $V = \mathbb{R}^N$; P ist eindeutig bestimmt durch $P(e_i)$; $i = 1, \dots, N$.

Berechnung der besten Approximation

Sei $U = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ und

$B = \{ g_1, \dots, g_n \}$ linear unabhängig

$$f^* - f \perp U \iff f^* - f \perp g_k \quad k = 1, \dots, n$$

$$\iff \sigma(f^* - f, g_k) = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

$$\iff \sigma(f^*, g_k) = \sigma(f, g_k).$$

Sei $f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \implies$

$$\boxed{f^* - f \perp U \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = \sigma(f, g_k) \quad * \qquad k = 1, \dots, n}$$

(*) ist eindeutig lösbar $\Longleftrightarrow$

(**) $\sum_i \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = 0 \quad k = 1, \dots, n$

ist eindeutig lösbar.

i.e. $\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$

(**) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = 0 \quad k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = 0$

$\Rightarrow \sigma\left(\sum_i \lambda_i g_i, \sum_k \lambda_k g_k\right) = 0$

$\xRightarrow{\text{pos def.}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = 0 \xRightarrow[\text{der } g_i]{\text{l.u}} \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$ $\square$

$\Rightarrow$ Beste Approx. f^* von f in $\mathcal{U}$ existiert

und ist eindeutig!

<u>Beispiele</u>: $V = C_0(I, \mathbb{R})$ $I = [a, b]$

$$\sigma(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

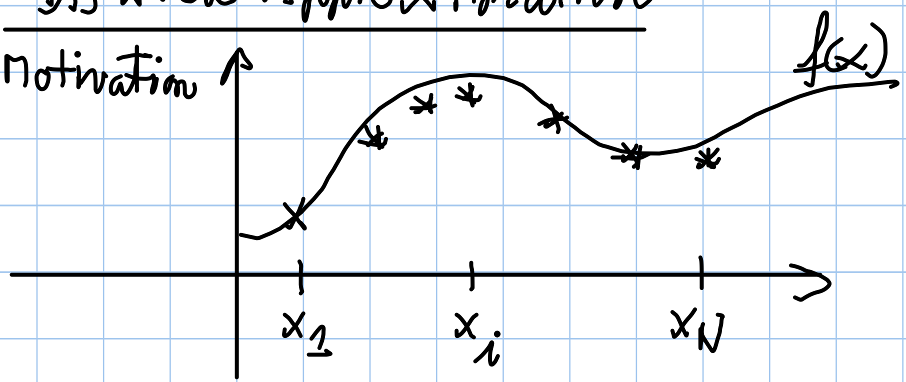
$$\mathcal{U} = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \text{ mit } g_i:$$

1) $1, x, x^2, \ldots$

2) $1, \sin(kx), \cos(kx)$

Diskrete Approximation

Motivation



<u>Def.</u> $\bar{(\ )} : C_0(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$f \longmapsto \bar{f} := \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Def. geg (x_i, y_i) $i = 1, \dots, N$ $\quad x_i \in I \subseteq \mathbb{R}$

u. $g_1, \dots, g_n \in C_0(I, \mathbb{R})$

$f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ heißt beste diskrete Approximation $\iff$

$$\forall_{g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle} \quad \|\bar{f}^* - \bar{y}\| \leq \|\bar{g} - \bar{y}\|, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

"Methode der kleinsten Quadrate" von Gauss

geg. (x_i, y_i) $i = 1, \dots, N$

$g_i \in C_0(I, \mathbb{R})$ $i = 1, \dots, n$

Gesucht Fkt $f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ so dass

$$\forall_{g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle} \quad \sum_{i=1}^{N} \left(f^*(x_i) - y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \left(g(x_i) - y_i \right)^2$$

d.h. $\quad \| \bar{f}^* - \bar{y} \|^2 \leq \| \bar{g} - \bar{y} \|^2$

Berechnung der besten diskreten Approximation

$$
\begin{tikzcd}
C_0(I,\mathbb{R}) \arrow[r, "\overline{(\cdot)}"] & \mathbb{R}^N \ni \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \\
\langle g_1, \dots, g_n \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{(\cdot)}", "\text{surj.}"'] & \langle \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_n \rangle \ni \overline{y}^* \arrow[u, hook] \\
 & \mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\shortparallel"]
\end{tikzcd}
$$

<u>Schritt 1</u>: Berechne beste Approx. von $\overline{y}$ in $\mathcal{U}$ (existiert und ist eindeutig)

<u>Schritt 2</u>: Sei $\overline{y}^* := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{g}_i$. Dann ist $f^* := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ beste diskrete Approximation.

Beweis. Nach Konstruktion gilt:

$$\overline{f^*} = \overline{y}^* \implies$$

$$\forall g \in \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \quad \| \overline{f^*} - \overline{y} \| = \| \overline{y}^* - \overline{y} \| \leq \| \overline{g} - \overline{y} \|,$$

da $\overline{f^*} = \overline{y}^*$ beste Approx. von $\overline{y}$ in U.

Anwendung: Logistische Regression

Interpolation

Bezeichnung wie oben

$f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ heißt <u>Interpolationsfkt.</u> der (x_i, y_i), $i = 1, \dots, N$ $\Leftrightarrow$

$$\forall_{i=1,\dots,N} \quad f^*(x_i) = y_i$$

$$\begin{tikzcd}
C_0(I, \mathbb{R}) \arrow[r, "\overline{(\cdot)}"] & \mathbb{R}^N \ni \bar{y} \\
\langle g_1, \dots, g_n \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{(\cdot)}"] & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ist f^* eine Interpolationsfkt., so gilt

$$\overline{f^*} = \bar{y}^* = \bar{y} \quad \text{d.h.}$$

<u>Satz</u> geg. (x_i, y_i); $i = 1, \dots, N$ u. $g_i \in C_0(I, \mathbb{R})$ $i = 1, \dots, n$

Zu (x_i, y_i) gibt es eine Interpolationsfkt

$$f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \Leftrightarrow \bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$$

Hauptsatz der Interpolationstheorie

geg (x_i, y_i); $i = 1, \dots, N+1$ $\quad x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

Dann existiert genau ein Polynom $p(x)$ vom Grade $\leq N$ mit

$$p(x_i) = y_i \text{ für } i = 1, \dots, N$$

Beweis

$$\begin{tikzcd} C_0(I, \mathbb{R}) \arrow[r, "\overline{()}"] & \mathbb{R}^{N+1} \ni \bar{y} \\ \langle 1, x, \dots, x^N \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^N \rangle \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$x_i \neq x_j;\ i \neq j \Rightarrow \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x^2}, \dots, \bar{x^N}\} \text{ l.u.}$$

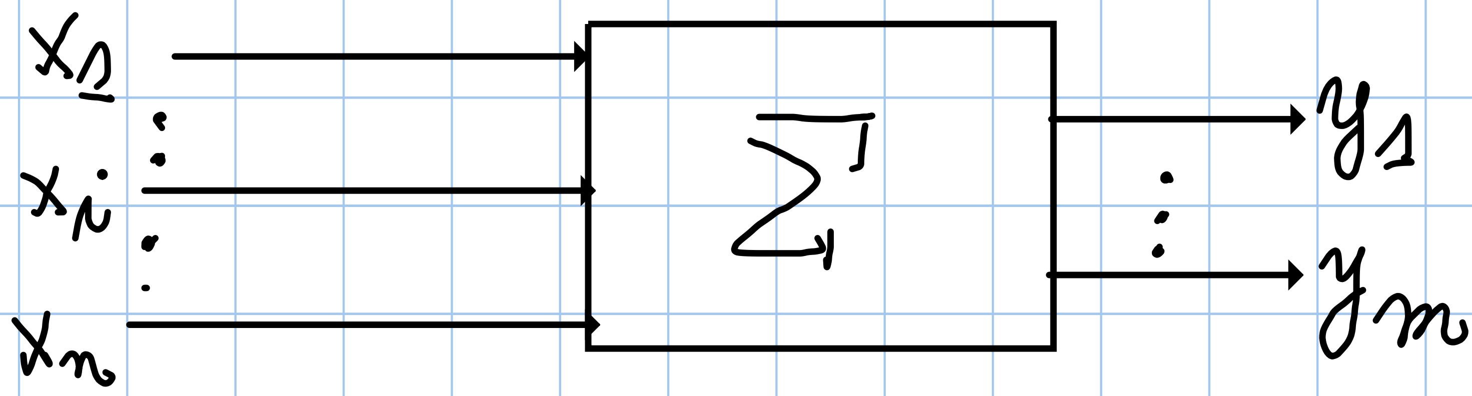
$$\Rightarrow \langle \bar{1}, \dots, \bar{x^N} \rangle = \mathbb{R}^{N+1} \Rightarrow$$

$$\forall_{\bar{y} \in \mathbb{R}^{N+1}} \quad \bar{y} \in \langle \bar{1}, \dots, \bar{x^N} \rangle \Rightarrow$$

$$f^*(x) = p(x) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x^k \text{ ist}$$

Interpolationspolynom.

Verallgemeinerung



geg. $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ $i = 1, \dots, N$

ges. Abbildung f^* mit $f^*(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$.

Interpolationspolynom nach Lagrange

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad i,j = 1, \dots, N+1$$

$$L_i(x) := \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{N+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{N+1})}$$

$$\Rightarrow P(x) := \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x)\, y_i$$

Damit gilt: $$P(x_j) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x_j) = y_j$$