$$
\begin{tikzcd}
C_0(I,\mathbb{R}) \arrow[r, "\overline{(\ )}"] & \mathbb{R}^N \ni \bar{y} \\
\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{(\ )}", "\text{surj.}"'] & \langle \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n \rangle \ni \bar{y}^* \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

$$f^* \in \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$$

$$\overline{f^*} = \bar{y}^*$$

Sei $\bar{y}^* = \sum_i \lambda_i \bar{g}_i \Rightarrow \boxed{f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i}$

$$\forall_{x_i} \quad f^*(x_i) = y_i \quad \text{(Interpolationsfkt)}$$

$$\overline{f^*} = \bar{y} = \bar{y}^* \Longleftrightarrow \bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n \rangle$$

geg $\langle 1, x, \dots, x^N \rangle$

$(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, N+1, \quad x_i \neq x_j \quad i \neq j$

$$\begin{array}{ccc} C_0(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ \cup & & \cup \\ \langle 1, x, \dots, x^N \rangle & \longrightarrow & \langle \overline{1}, \overline{x}, \dots, \overline{x^{N+1}} \rangle \end{array}$$

Lemma: (x_i, y_i) $i = 1, \dots, N+1$; $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

1) Dann gilt $\overline{1}, \overline{x}, \dots, \overline{x^N}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^{N+1}$.

2) $\langle \overline{1}, \overline{x}, \dots, \overline{x^{N+1}} \rangle = \mathbb{R}^{N+1}$.

3) $\overline{y} \in \mathbb{R}^{N+1} \Longrightarrow \overline{y} \in \langle \overline{1}, \dots, \overline{x^{N+1}} \rangle$

Lagrange Interpolationspolynom

$$L_i(x) := \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{N+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{N+1})}$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\boxed{f^*(x) := \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x)\, y_i}$$

ist das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom.

Beweis $f^*(x_j) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i(x_j)\, y_i = y_j$

Determinanten (Einführung)

geg. $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ $\quad c := \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \qquad \begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y &= \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y &= \gamma_2 \end{aligned}$

$$x = \frac{\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \qquad y = \frac{\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}.$$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ eindeutig lösb. $\Leftrightarrow \det A = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$

Bemerk $\quad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

a, b linear abhängig $\Leftrightarrow \det A = 0$

Beweis $\quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\beta_1 = \lambda \alpha_1$ u. $\beta_2 = \lambda \alpha_2$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1$

$\Leftrightarrow \det A = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$

<u>Folg</u> a u. b sind linear unabhängig

$\iff \det A = \det(a, b) \neq 0$

<u>Satz</u> $A = (a_1, \dots, a_n)$ invertierbar $\iff a_1, \dots, a_n$ l.u.

<u>Beweis</u>

geg $A \in K^{n \times n}$; $A: K^n \longrightarrow K^n$

A invertierbar $\iff \exists_{B \in K^{n \times n}} \; AB = BA = E$

$\iff Ax = b \quad b \in K^n$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar (≡ injektiv + surjektiv)

$\iff Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\sum_i x_i a_i \Rightarrow x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

$A = (a_1, \dots, a_n)$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Beispiel $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -\underline{1} \neq 0$

$\Rightarrow$ A invertierbar.

2) Flächeninhalt des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms

$$F = |\det A| = \underline{1}.$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

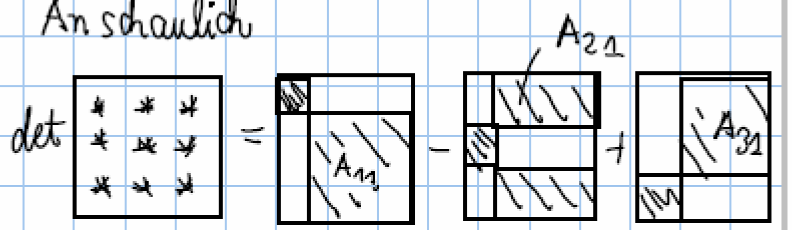
$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$V(a_1, a_2, a_3) =$$

$$\Big| \alpha_{11} \left(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23} \right) - \alpha_{21} \left(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{13} \right) + \alpha_{31} \left(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13} \right) \Big|$$

$$\det(a_1, a_2, a_3) = \alpha_{11} \ldots$$

Anschaulich



$$\alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \alpha_{31} \det A_{31}$$

<u>Bemerkung</u> Regel von Sarrus (1798–1861)

$$\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

<u>Beispiel</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & -2 & 3 & 0 & -2 \\
-2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\
3 & 6 & 5 & 3 & 6
\end{array}$$

$$\det A = 0 + 12 - 36 - 9 - 0 - 20 = -53$$

<u>Bemerk.</u> $a_1, a_2\ a_3$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ A invertierbar

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Def. Determinante einer $n \times n$ Matrix.

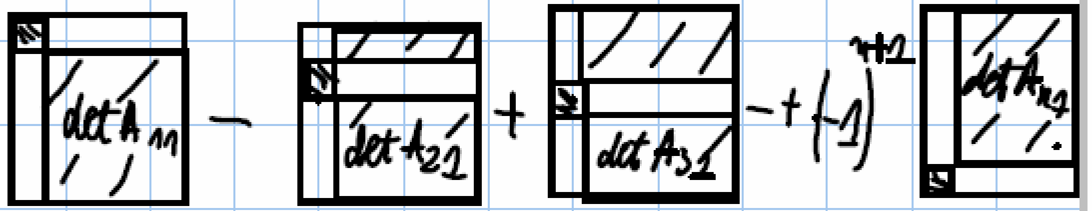
Rekursive Def. der Determinante

(**) 1) $n=1 \quad A=(\alpha_{11}) \quad \det A := \alpha_{11}$

2) Für $n \geq 2$ (Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\det A := \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \alpha_{31} \det A_{31} - + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \det A_{n1}$$

$A_{i1} \equiv$ Matrix, die aus A durch Entfernen der ersten Spalte u. der i-ten Zeile entsteht $(1 \leq i \leq n)$

$\det A =$ 

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \det A_{11} - 3 \det A_{21} + 0 \det A_{31} - 2 \det A_{41}$$

$$= -32 - 3 \cdot 24 - 2(-16) = -72.$$

<u>Bemerkung</u> Wendet man (**) wieder auf (**) rekursiv an $\Rightarrow$

$$\boxed{\det A = \sum_{\pi \in S_n} \underbrace{(-1)^{\varepsilon(\pi)}}_{\operatorname{sgn}(\pi)} \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n)n}}$$

<u>Permutation</u>

$$\pi : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\text{bijektiv}} \{1, \dots, n\}$$

Schreibweise $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \cdots & \pi(n) \\ 1 & & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi^{-1}(1) & \cdots & \pi^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$