Grundlegende Definitionen und Beispiele

Für jede nichtleere Menge M ist die Menge

$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

aller bijektiven Selbstabbildungen mit der

Abbildungskomposition

$$f*g(x) := f(g(x))$$

eine Gruppe.

S(M) heißt die **symmetrische Gruppe** auf M,

ihre Elemente heißen ***Permutationen* von M**.

Symmetrische Gruppe S_n

Definition (S_n):

Sei $N_n := \{1, 2, \ldots, n\}$

S_n bezeichne die Gruppe aller Permutationen

$$\pi: \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

d.h. die Menge der bijektiven Abbildungen von N_n.

S_n heißt symmetrische Gruppe. Sei $\pi \in S_n$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \pi[1] & \pi[2] & \pi[3] & \ldots & \pi[n-1] & \pi[n] \end{pmatrix}$$

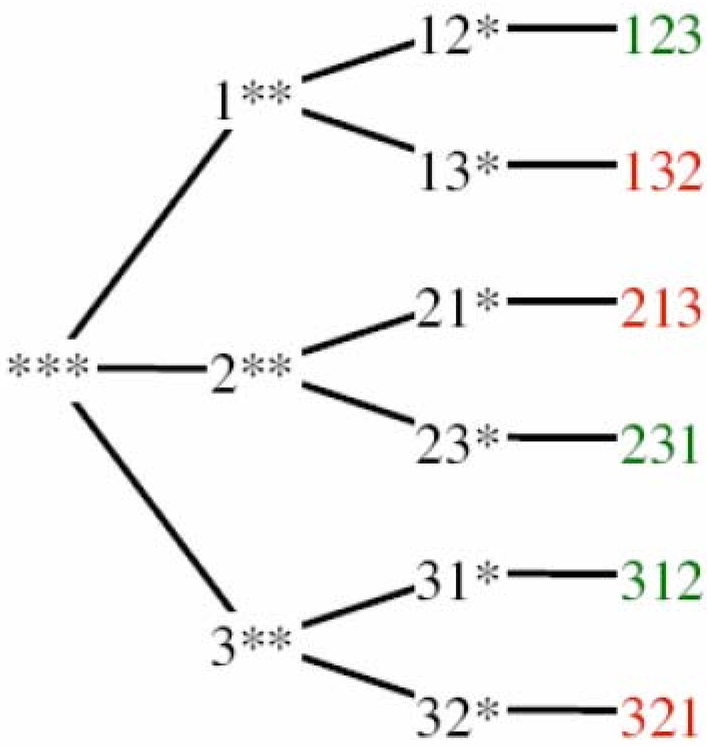
$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots & n \\ f(1) & f(2)\ldots & f(n) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2\ldots & n \\ g(1) & g(2)\ldots & g(n) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\ldots & n \\ f(g(1)) & f(g(2))\ldots & f(g(n)) \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutationen

Beispiel (1,2,3)



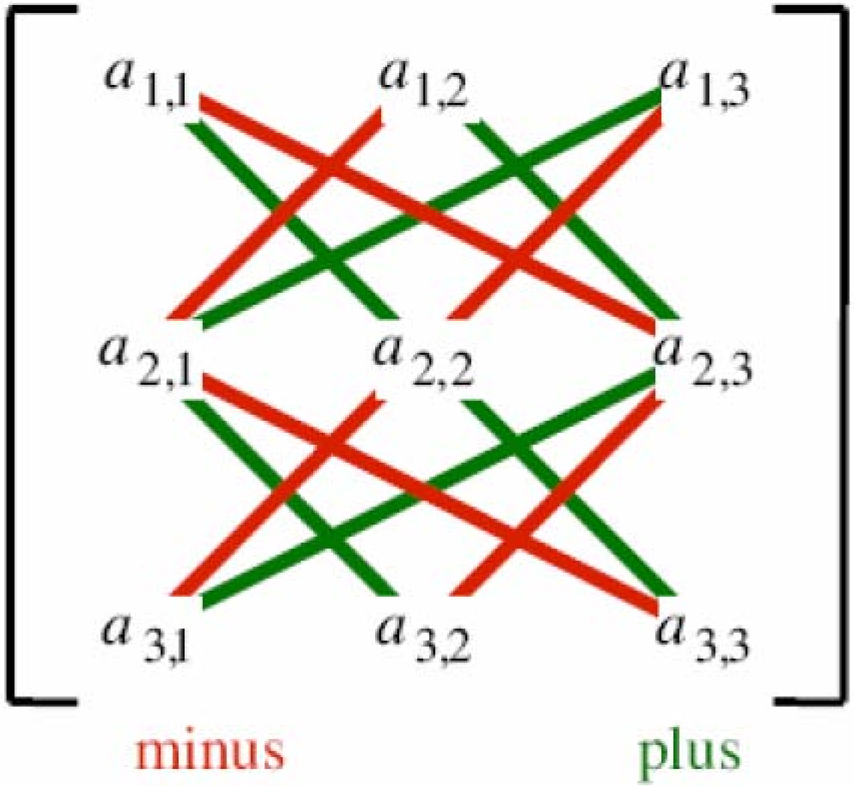
3! = 6 Permutationen der Ziffern 1,2,3

Grün: gerade Anzahl von Vertauschungen

Rot: ungerade Anzahl von Vertauschungen

Permutationen

Beispiel (1,2,3)



$$\det(A) = \underline{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}} - \underline{a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}} - \underline{a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}} + \underline{a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}} + \underline{a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}} - \underline{a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}}$$

Permutationsgruppe mit n Elementen

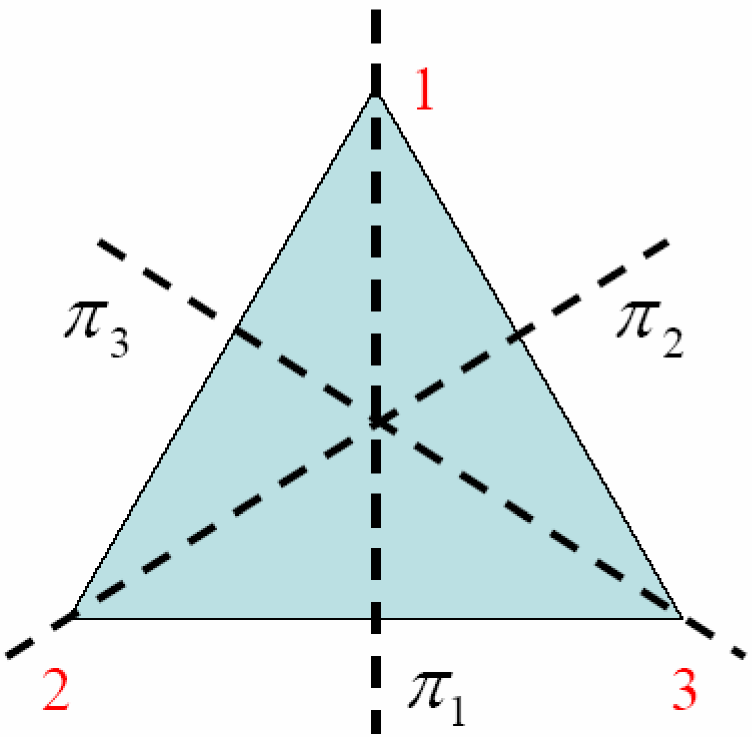
$(S_n, *)$ ist eine Gruppe mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ Elementen.

Beispiel. $|S_2| = 2, |S_3| = 6, |S_4| = 24, |S_5| = 120, |S_6| = 720, \ldots$

$$\left.\begin{array}{lll}
\textbf{Wahl für } \pi(1): & \pi(1) \in \{1,2,\ldots,n\} & \text{n Möglichkeiten} \\
\textbf{für } \pi(2): & \pi(2) \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{\pi(1)\} & \text{n-1 Möglichkeiten} \\
\textbf{für } \pi(3): & \pi(3) \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{\pi(1), \pi(2)\} & \text{n-2 Möglichkeiten} \\
\quad \ldots & & \\
\textbf{für } \pi(n-1): & \pi(n-1) \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{\pi(1),\ldots,\pi(n-2)\} & \text{2 Mögl.} \\
\textbf{für } \pi(n): & \pi(n) \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{\pi(1),\ldots,\pi(n-1)\} & \text{1 Mögl.}
\end{array}\right\} = n!$$

Geometrische Bedeutung

Die Gruppe $(S_3, ^*)$ ist die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks.



$\pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ Tu nix

$\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ Spiegelung an Höhe durch 1

$\pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Spiegelung an Höhe durch 2

$\pi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Spiegelung an Höhe durch 3

$\pi_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Drehung um 120 Grad

$\pi_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Drehung um 240 Grad

Satz Jede Gruppe ist Untergruppe einer symmetrischen Gruppe

Beweis geg. Gruppe G

$$G \xrightarrow{\subseteq} S(G) \quad \text{injektiv}$$

$$g \longmapsto L_g$$

$$L_g : G \longrightarrow G \quad \text{bijektiv}$$

$$x \longmapsto L_g(x) := gx$$

Zyklen

Definition (hochabschreckend). Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt *Zyklus der Länge* k, wenn es eine Zahl $i \in \{1,2,...,n\}$ gibt, so dass die Menge $Z = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)) = \pi^2(i), ..., \pi^{k\text{-}1}(i)\}$ genau k Elemente enthält und $\pi^{\mathrm{k}}(i) = i$ ist und für alle $j \notin Z$ jeweils $\pi(j) = j$ gilt.

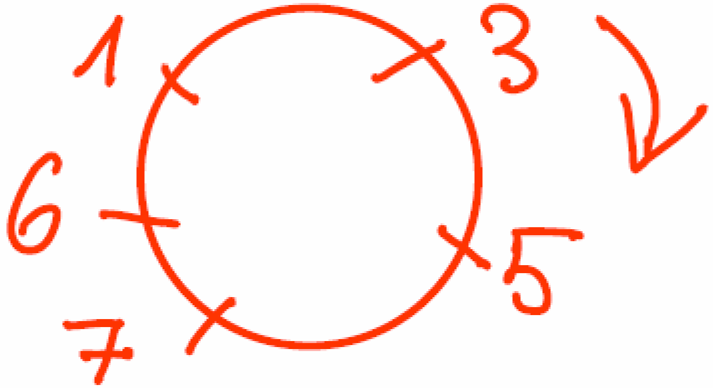
1	2	3	4	5	6	7	8
3	2	5	4	7	1	6	8

ist ein Zyklus der Länge 5 :

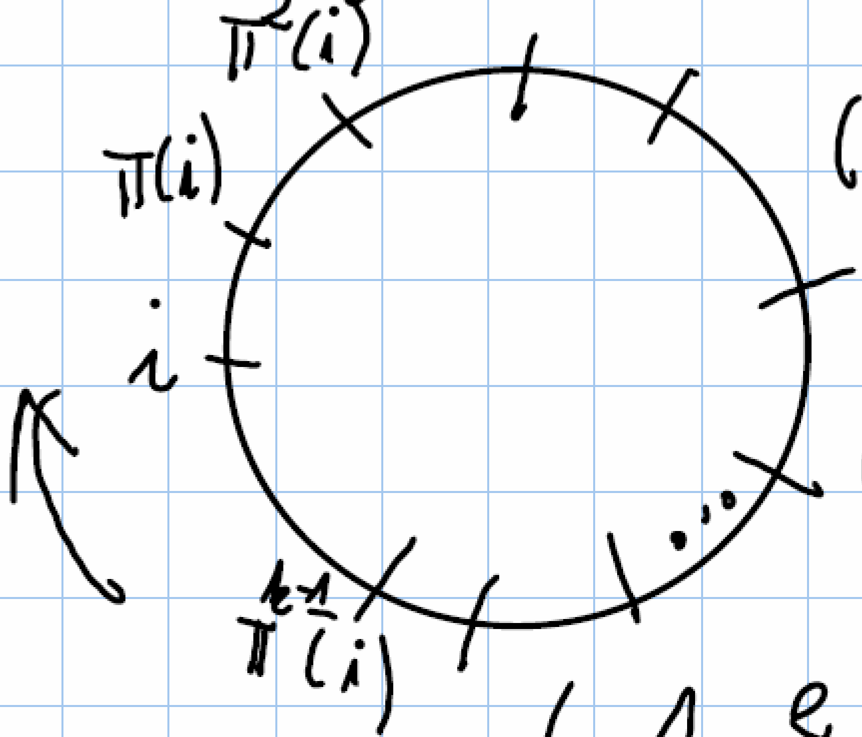
$\mathrm{i} = 1,\ \mathrm{Z} = \{1, \pi(1) = 3, \pi(3) = 5, \pi(5) = 7, \pi(7) = 6\}$

und $\pi(6) = 1$, außerdem $\pi(2) = 2,\ \pi(4) = 4, \pi(8) = 8.$

Schreibweise. (1 3 5 7 6)



Zykel der Länge k



$$(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$$

Beispiel

$$(1, 3, 5, 7, 6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Transpositionen

Definition. Ein Zyklus der Länge 2 heißt *Transposition*.

Transpositionen sind die „einfachsten“ Elemente (nach der Identität), aber jede Permutation kann man aus Transpositionen zusammensetzen.

Schreibweise. $(ij) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{bmatrix}$

Die Transposition (ij) vertauscht nur die Stellen i und j.

Transpositionen

Definition: Eine **Transposition heißt** ***Nachbarnvertauschung*** , wenn sie zwei benachbarte Zahlen vertauscht, und alle anderen Zahlen festlässt:
Es gibt also j zwischen 1 und n mit $p(j) = j+1$, $p(j+1) = j$, und $p(i) = i$ sonst.

$$\pi = (j \;\; j+1)$$

Permutationen und Transpositionen

Beweis des Satzes.

Durch Angabe eines Algorithmus:

Eingabe: Permutation
Ausgabe: Zerlegung in Transpositionen

1. Stelle die Permutation als Hintereinanderausführung von paarweise elementfremden Zyklen dar.

2. Stelle jeden Zyklus als Hintereinanderausführung von Transpositionen dar.

Satz *Sei π ein Zyklus der Länge k*

$$\pi = (i\ \pi(i)\ \pi^2(i) \ldots.\ \pi^{k-1}(i))$$

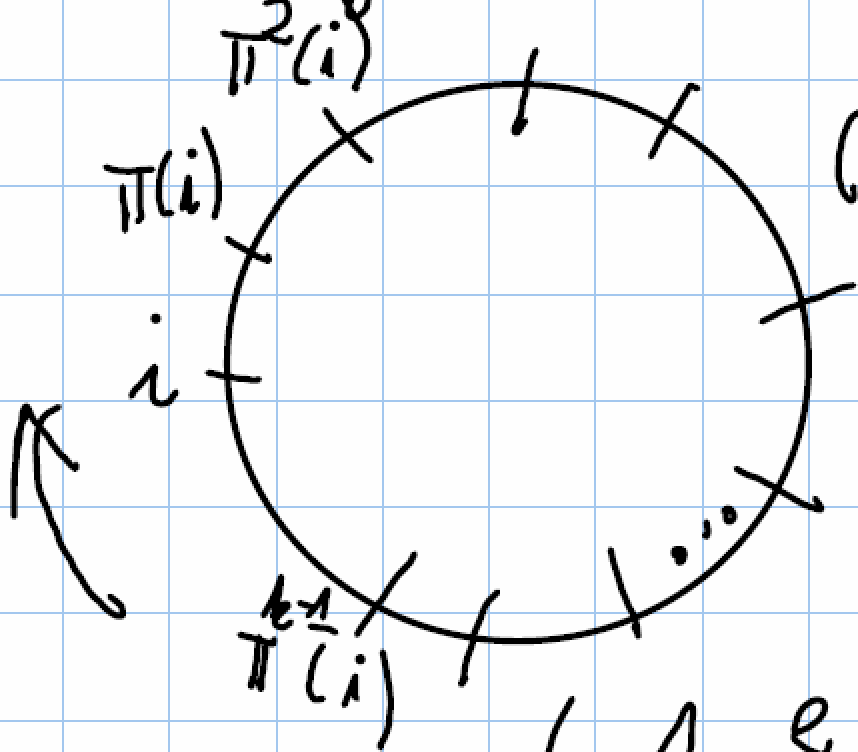
Dann ist π ein Produkt von Transpositionen

$$\pi = (i\ \pi(i))\ (\pi(i)\ \pi^2(i)) \ldots.\ (\pi^{k-2}(i)\ \pi^{k-1}(i))$$

Beweis: Nachrechnen, indem man die linke und die rechte Seite für alle x=1,…n auswertet.

Beispiel: (142) = (14)(42)

Zykel der Länge k



$$(i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{k-1}(i))$$

Beispiel

$$(1, 3, 5, 7, 6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Satz *Sei π ein Zyklus der Länge k*

$$\pi = (i\ \pi(i)\ \pi^2(i) \ldots.\ \pi^{k-1}(i))$$

Dann ist π ein Produkt von Transpositionen

$$\pi = (i\ \pi(i))\ (\ \pi(i)\ \pi^2\ (i))\ \ldots.\ (\ \pi^{k-2}\ (i)\ \pi^{k-1}\ (i))$$

Beweis: Nachrechnen, indem man die linke und die rechte Seite für alle x=1,…n auswertet.

Beispiel: (142) = (14)(42)

Permutationen und Transpositionen

Eingabe. $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Stelle Permutation als Produkt von paarweise elementfremden Zyklen dar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (142) \circ (35)$$

Stelle jeden Zyklus als Produkt von Transposition dar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (142) \circ (35) = (14) \circ (24) \circ (35)$$

Definition Signatur einer Permutation

$$\boxed{\operatorname{sgn}(p) = \prod_{j<k} \frac{p(k) - p(j)}{k - j} .}$$

Satz: (Die Signatur ist ein Gruppenhomomorpsmus)

d.h. es gilt $\operatorname{sgn}(pq) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(q)$ für p,q aus S_n .

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{1,-1\}$$

Folgerung: Für p aus S_n sei $p = q_1 q_2 \dots q_k$.

Sind alle q_j Transpositionen, so gilt $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^k$.

Definition: Eine Permutation p heißt
gerade, falls $\operatorname{sgn}(p)= 1$ und
ungerade, falls $\operatorname{sgn}(p)= -1$

Satz Die Signatur ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$\operatorname{sgn}: S_n \longrightarrow \{1,-1\}$$

Beweis Seien $p, q \in S_n$

$$\operatorname{sgn}(pq) \stackrel{?}{=} \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(q)$$

$$\operatorname{sgn}(pq) = \prod \frac{pq(k)-pq(j)}{k-j} =$$

$$\prod \frac{pq(k)-pq(j)}{q(k)-q(j)} \cdot \frac{q(k)-q(j)}{k-j} =$$

$$^{*}\underbrace{\prod \frac{pq(k)-pq(j)}{q(k)-q(j)}}_{\operatorname{sgn}(p)} \underbrace{\prod \frac{q(k)-q(j)}{k-j}}_{\operatorname{sgn}(q)} \qquad \square$$

$$\operatorname{sgn}(p) = \prod \frac{p(k)-p(j)}{k-j} = \prod \frac{p(q(k))-p(q(j))}{q(k)-q(j)}$$

Definition Signatur einer Permutation

$$\boxed{\operatorname{sgn}(p) = \prod_{j<k} \frac{p(k) - p(j)}{k - j}\,.}$$

Satz: (Die Signatur ist ein Gruppenhomomorpsmus)

d.h. es gilt $\operatorname{sgn}(pq) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(q)$ für p,q aus S_n .

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{1,-1\}$$

Folgerung: Für p aus S_n sei $p = q_1 q_2 \ldots q_k$.

Sind alle q_j Transpositionen, so gilt $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^k$.

Definition: Eine Permutation p heißt

gerade, falls $\operatorname{sgn}(p)= 1$ und

ungerade, falls $\operatorname{sgn}(p)= -1$

Permutationen

σ sei eine Permutation der Ziffern 1, 2, ... , n

Es gibt $n!$ solche σ

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{signum} \\ \text{Vorzeichen}}}}}{\operatorname{sgn}}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Leibniz. 1678

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(1)1} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}}$$

Rekursive Def. $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$

$n=1 \quad \det A = \alpha_{11}$

$n \geq 2 \quad \det A := \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \dots (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \det A_{n1}$

Satz $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$

Beweis (Entwicklung nach der ersten Spalte)

$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \dots \pm \alpha_{n1} \det A_{n1}$

Da $\alpha_{21} = \dots = \alpha_{n1} = 0 \Rightarrow$

$\det A = \alpha_{11} \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \det A_{11}$

$\dots = \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn}$

Spezialfall: $\det E = 1$.

Beispiele

1) $$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

2) $$\det \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ \vdots & \ddots & 5 & -1 & 2 \\ & & & 4 & 3 \\ 0 & \cdots & & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

Satz (Charakterisierung der Determinantenfunktion

$$\det : K^{n\times n} \longrightarrow K$$
$$A \longmapsto \det A$$

1) $\det E = 1$.

2) Sind zwei Zeilen in A gleich $\Rightarrow$ $\det A = 0$

3) det ist linear in jeder Zeile.

$$\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \alpha z_i \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} z_1 \\ | \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} z_1 \\ a+b \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ a \\ z_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ b \\ | \\ z_n \end{pmatrix}$$

Folgerung 1) Vertauscht man zwei Zeilen, so kehrt sich das Vorzeichen um

2) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

Beweis

2) $\det(z_1, \dots, z_i + \lambda z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) =$
$\det(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) + \lambda \underbrace{\det(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n)}_{=0}$

1) $\det(\dots, z_i, \dots, z_j, \dots) =$
$\det(\dots, z_i - z_j, \dots, z_j, \dots) =$
$\det(\dots, z_i - z_j, \dots, z_i, \dots) =$
$\det(\dots, -z_j, \dots, z_i, \dots) =$
$-\det(\dots, z_j, \dots, z_i, \dots)$.

Wiederholung

Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
3. Addition bzw. Subtraktion eines λ-fachen einer Zeile zu einer anderen.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{II}}$$

$$= (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{\mathrm{IV}+2\mathrm{II}}$$

$$= (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}_{\mathrm{IV}-\frac{3}{2}\mathrm{III}} =$$

$$= (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (-1)1(-1)2\cdot 2$$

$$= 4$$

Anwendungen

1) Cramer-Regel (Cramer 1704-1752)

Satz $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$ invertierbar.
Dann hat das Gleichungssyst. $Ax = b$ die Lösung

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\det A} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}$$

Beweis $b = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

$$\det(b, a_2, \dots, a_n) = \det\left(\sum x_i a_i, a_2, \dots, a_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(a_i, a_2, \dots, a_n) = x_1 \det A$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det(b, a_2, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

analog für x_i. $\square$

Beispiel

$$2x + 3y = 3$$
$$5x - 7y = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}} = \frac{18}{29}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}} = \frac{17}{29}$$

Rechenregeln für Determinanten

Entsteht die Matrix A^* aus A durch elementare Zeilenumformungen vom Typ (i)

so gilt

Typ (1) $\det A^* = -\det A$

Typ (2) $\det A^* = \lambda \det A$

Typ (3) $\det A^* = \det A$

Rechenregeln für Determinanten

1) Symmetrie in Zeilen u. Spalten

$$\det A^T = \det A$$

2) (Multiplikationssatz)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

3) Invertierbarkeitstest.

$$A \text{ invertierbar} \Longleftrightarrow \det A \neq 0$$