Rechenregeln für Determinanten

(Zusammenfassung)

1) <u>Symmetrie in Zeilen und Spalten</u>

$\det A^t = \det A$

2) <u>Multiplikationssatz</u>

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

3) <u>Invertierbarkeitstest</u>

A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

äquivalent dazu

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$

$a_1, \dots, a_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow \det A = 0$

<u>Beweis</u> von 3) Sei $a_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k a_k$

$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{k \neq i} \lambda_k a_k, a_{i+1}, \dots, a_n)$

$= \sum_{k \neq i} \lambda_k \underbrace{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n)}_{=0}$

(da 2 Spalten (Zeilen) sind gleich)

$= 0$ $\square$

Eigenwerte, Eigenvektoren

$A \in K^{n \times n}$; $\quad A: K^n \longrightarrow K^n$

$A = (a_1, \dots, a_n)$ $\quad \boxed{A \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i}$

Def. $\lambda \in K$ heißt <u>Eigenwert der Matrix</u> $A \in K^{n \times n}$ $\Longleftrightarrow$

Es gibt $b \in K^n$, $b \neq 0$ mit

$$\boxed{A b = \lambda b}$$

b heißt <u>Eigenvektor von A</u> zum Eigenwert λ

Beispiel

geg. $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A hat Eigenwert $\lambda = -2$ mit zugehörigem Eigenvektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ denn es gilt

$$A b = -2 b \quad (\text{nachrechnen})$$

Berechnung von Eigenwerten

Es gilt $\lambda b = \lambda E(b)$ $\quad E \equiv$ Einheitsmatrix

$$A b = \lambda b \Leftrightarrow A b = \lambda E(b) \Leftrightarrow$$

$$A b - \lambda E(b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda E)(b) = 0 \qquad b \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda E$ nicht invertierbar

$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0$

Def. $\chi(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ heißt das <u>charakteristische Polynom</u> von A

Damit ist bewiesen

<u>Satz</u> $A \in K^{n \times n}$, $b \neq 0$, $\lambda \in K$

$$A b = \lambda b \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

Beispiel

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix};$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (\underbrace{a+d}_{= \mathrm{Spur}(A)^*})\lambda + (ad - bc)$$

$*$ $A \in K^{n \times n}$ $\quad \mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc}\,.$$

2) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda E) = (a-\lambda)(e-\lambda)(i-\lambda) + bfg + cdh$$
$$- c(e-\lambda)g - db(i-\lambda) - hf(a-\lambda)$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda E) = -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren.

1) Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$$

2) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)(b) = 0$$

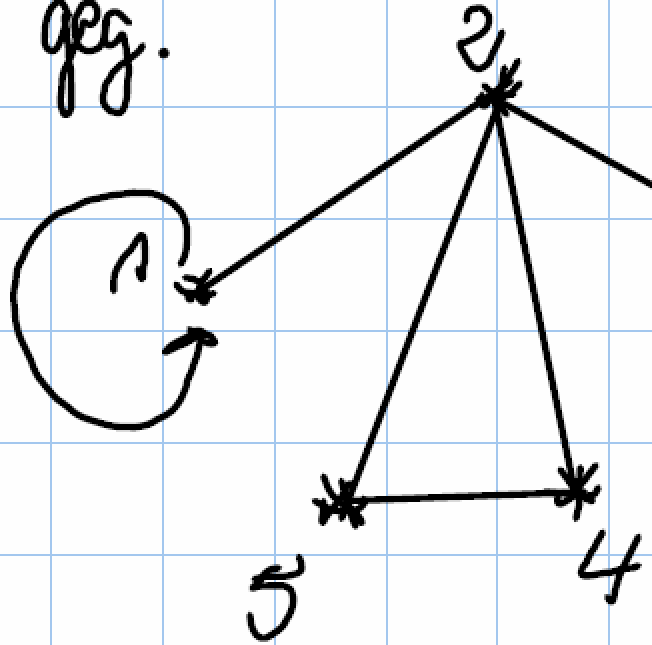
Die Lösungen sind die Eigenvektoren von A

Schlussbemerkungen

Die lineare Algebra ist grundlegend für zahlreiche Bereiche.

Beispiel: <u>Graphentheorie</u>

geg.



Repräsentation des Graphen als Matrix

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1
3	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0

Analysis

Bemerkung

Annahme: geg. sei auf dem $\mathbb{R}^n$ neben der Vektorraumstruktur eine Multiplikation, so dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein Ring ist. Insbesondere gelten damit die Distributivgesetze

$V = \mathbb{R}^n$

$$a \cdot (x+y) = ax + ay$$
$$(a+b)x = ax + bx$$

Seien $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren und

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \in \mathbb{R}^n$$

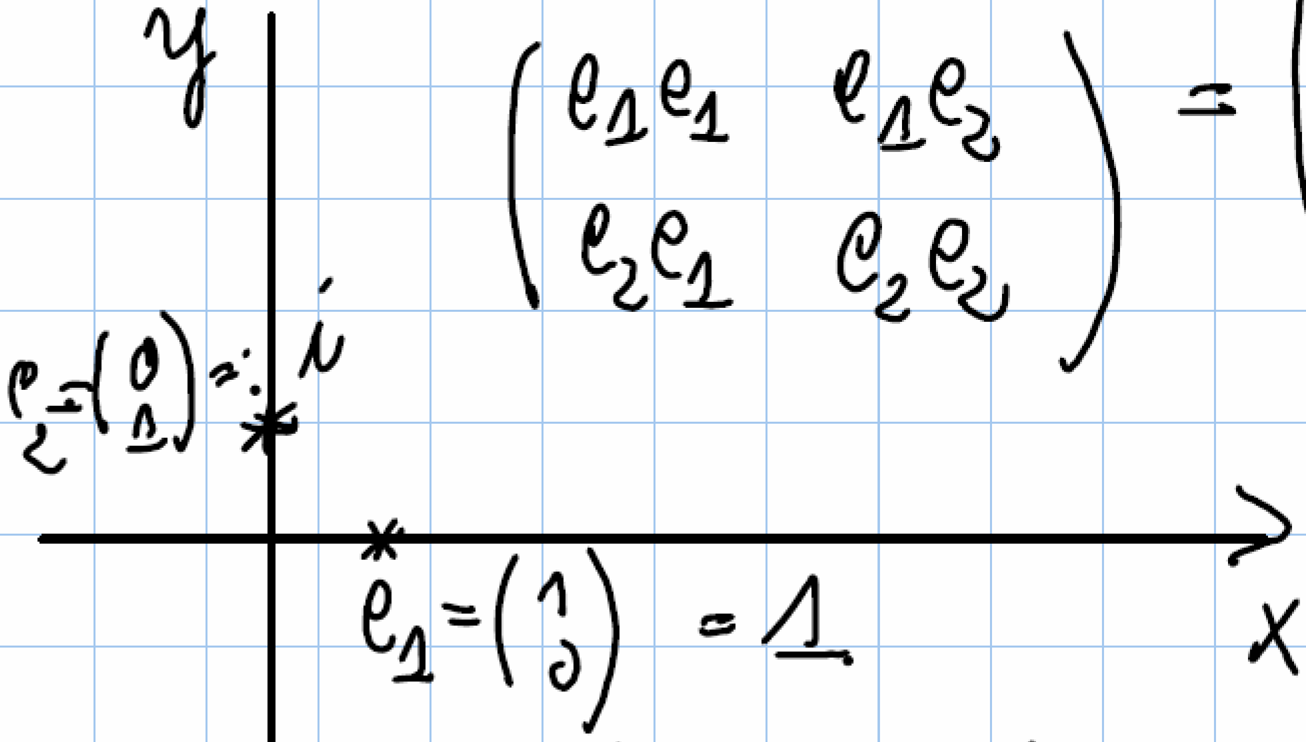
$$\Rightarrow x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_k \, e_i \cdot e_k$$

Multiplikation ist definiert durch $e_i e_k$ $\quad i,k = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} e_1 e_1 & \cdots & e_1 e_n \\ \vdots & & \\ e_n e_1 & \cdots & e_n e_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. $\mathbb{R}^2$ Bezeichnung $e_1 = 1$, $e_2 = i$



$$\begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & \underset{\underset{\underline{-1}}{\shortparallel}}{i^2} \end{pmatrix}$$

"Die Multiplikation ist definiert durch $i^2 := -1$."

<u>**Satz**</u> $\mathbb{R}^n$ ist Körper für $n = 1, 2, 4, 8$

Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen R

1) R ist ein Körper

(A1) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt das *Assoziativgesetz* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodaß $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(A3) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ ein $x' \in \mathbb{R}$, sodaß $x + x' = x' + x = 0$

(A4) Für alle $x, y \in R$ gilt das *Kommutativgesetz* $x + y = y + x$.

Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen R

Je zwei reellen Zahlen a, b $\in$ R ordnen wir ein Produkt a $\cdot$ b (ab) zu, so das gilt:

(M1) $\forall$a, b $\in$ R $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(M2) $\forall$ a, b $\in$ R $a \cdot b = b \cdot a$

(M3) Es existiert ein Element 1$\in$ R mit $1 \cdot a = a$ $\forall$ a $\in$ R

Existenz des Einselements, 1 6= 0

(M4) $\forall$ a $\in$ R mit a $\neq$ 0 gibt es genau ein Element b $\in$ R mit

$a \cdot b = 1$.

Dieses Element bezeichnen wir mit a−1 oder 1/a und nennen es das multiplikative Inverse zu a

(D) $\forall$ a, b, c $\in$ R $a \cdot (b + c) = (ab) + (ac)$

Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen R

2) R ist angeordnet

Es gibt eine Menge $P \subset \mathbb{R}$, sodaß gilt:

(O1) Von den drei Aussagen $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau eine wahr.

(O2) Sind $x, y \in P$, so sind auch $x + y$ und $x \cdot y \in P$.

Die Menge P nennt man die Menge der positiven reellen Zahlen. Wir definieren nun

$$x > y :\Longleftrightarrow x - y \in P$$
$$x < y :\Longleftrightarrow y - x \in P.$$

Das Vollständigkeitsaxiom

Grundbegriffe

Supremum einer Teilmenge M

Definition: Sei $M \subseteq R$ und $s \in R$.

s heisst **obere (untere) Schranke** von M,

falls $x \leq s$ (bzw. $s \geq x$) für alle $x \in M$.

Definition: Sei $M \subseteq R$ und $s \in R$.

s heisst das **Supremum von M**, falls s kleinste obere Schranke von M.

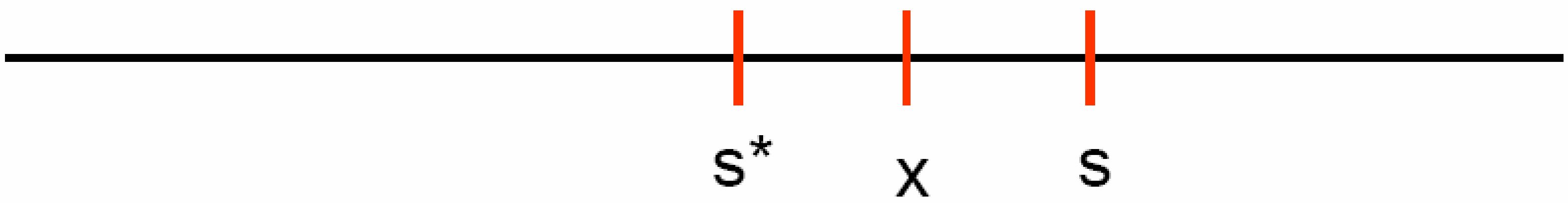
Das Vollständigkeitsaxiom

Grundbegriffe

Bezeichnung: $\mathbf{s := \sup M}$

also s kleinste obere Schranke genau dann wenn

1. $\forall\, x \in M\ x \leq s$
2. $\forall\, s^* < s\ \exists\, x \in M\ s^* < x$
   (jedes $s^* < s$ ist keine obere Schranke)



Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen R

2) R erfüllt das Vollständigkeitsaxiom

Vollständigkeitsaxiom

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge S von R besitzt eine kleinste obere Schranke.

Das Vollständigkeitsaxiom

Grundbegriffe

Definition: $M \subset R$ heisst nach unten beschränkt, falls es ein $s \in R$ mit $s \leq x \ \forall \ x \in M$ gibt.

(s heisst in diesem Fall untere Schranke)

Definition: Sei $M \subset R$, $i \in R$. i heisst das **Infimum von M** (Bezeichnung infM, falls grösste untere Schranke),

d. h.

(i) $i \leq x \ \forall \ x \in M$

(ii) $\forall \ i_0 > i \ \exists \ x \in M : x < i_0$

Satz: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge besitzt ein Infimum (d. h. eine grösste untere Schranke).

Beweis Übungsaufgabe.

Charakterisierung der reellen Zahlen
Anmerkung

Satz. *Gegeben seien zwei angeordnete Körper K (mit den Operationen $+, \cdot$ und dem Positivitätsbereich P) und K' (mit den Operationen $+', \cdot'$ und dem Positivitätsbereich P'), die das Vollständigkeitsaxiom erfüllen. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\iota : K \to K',$$

sodaß für alle $x, y \in K$:

$$\iota(x+y) = \iota(x) +' \iota(y), \quad \iota(x \cdot y) = \iota(x) \cdot' \iota(y), \quad x \in P \Longleftrightarrow \iota(x) \in P'.$$

Grundbegr.

geg $\mathbb{R}^n$ $\quad$ (Norm, Länge)

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Abstand $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

$$\|\ \|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

1) Folgen

Def. $(a_i;\ i \in \mathbb{N})$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^n$

$$\equiv N: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n:\ i \mapsto a_i$$

Def. $(a_i;\ i \in \mathbb{N}$ <u>konvergiert gegen</u> $a \in \mathbb{R}^n$

$$\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{i(\varepsilon) \in \mathbb{N}}\ \forall_{i \geq i(\varepsilon)}\ \|a_i - a\| < \varepsilon$$

Schreibweise: $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = a$

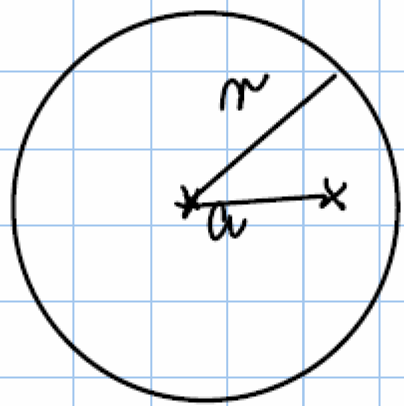
Bemerkung

1) $K(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| \leq r\}$

heißt Kreis um a mit Radius r

(bzw. n-dimensionale Kugel um a mit Radius r

$|x-a| \leq r$



2) Offene n-dimensionale Kugel mit Radius r

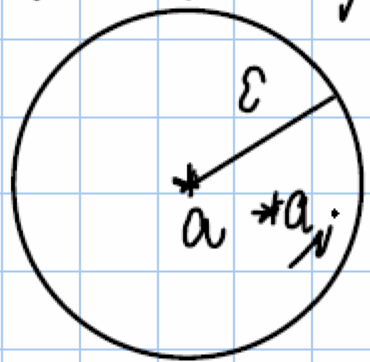
um a : $K_0(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| < r\}$

3) Rand der n-dimensionalen Kugel

$\mathrm{Rand}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x-a\| = r\}$

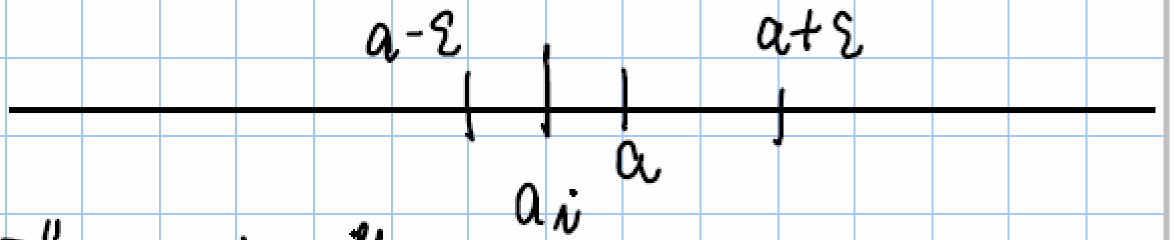
Bemerkung geg. $\varepsilon > 0$. Dann liegen nur endlich viele a_i ($i = 1, \dots, i(\varepsilon)-1$) außerhalb von $K(a, \varepsilon)$.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{i(\varepsilon)\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{i \geq i(\varepsilon)}{\forall} \quad \|a_i - a\| < \varepsilon$$



$i \geq i(\varepsilon)$

Spezialfall: $n = 1$



Für $n=1$ gilt:

$$\|x-y\| = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|.$$

Def $(a_i,\ i \in \mathbb{N})$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^n$

$(a_i;\ i \in \mathbb{N})$ **Cauchy-Folge** $\Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{i(\varepsilon)}{\exists} \quad \underset{i,j \geq i(\varepsilon)}{\forall} \quad \| a_i - a_j \| < \varepsilon$$

Satz geg $(a_i,\ i \in \mathbb{N})$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^n$

$(a_i;\ i \in \mathbb{N})$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(a_i;\ i \in \mathbb{N})$ Cauchy-Folge.