Def. $(a_i ; i \in \mathbb{N})$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^N$

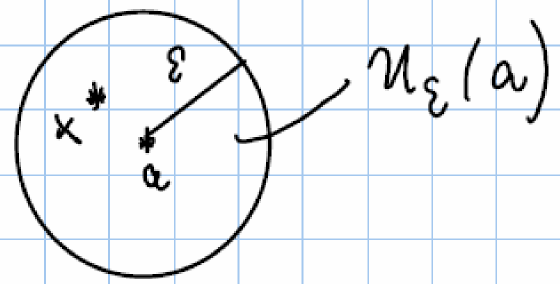
(a_i) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{i(\varepsilon)} \ \forall_{i \geq i(\varepsilon)} \ \| a_i - a \| < \varepsilon}$$

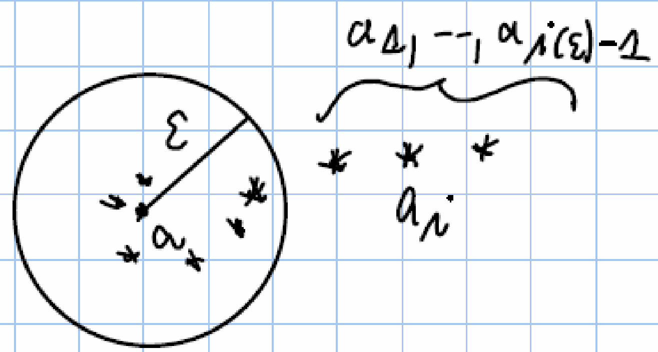
Schreibweise $\equiv \lim\limits_{i \to \infty} a_i = a$

1) <u>ε - Umgebung</u>

$$\mathcal{U}_\varepsilon (a) := \{ x \in \mathbb{R}^N ; \| x - a \| < \varepsilon \}$$



2)



a heißt <u>Grenzwert der Folge</u> $(a_i;\ i\in\mathbb{N})$

Def. $(a_i;\ i\in\mathbb{N})$ heißt <u>Cauchy-Folge</u> $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{i(\varepsilon)\in\mathbb{N}}\ \forall_{i,j\geq i(\varepsilon)}\ \|a_i-a_j\|<\varepsilon}$$

<u>Satz</u> Eine Folge (a_i) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (a_i) Cauchy-Folge.

Beweis

"$\Rightarrow$" $\|a_i-a_j\| = \|a_i-a+a-a_j\|$

$$\leq \underbrace{\|a_i-a\|}_{\leq\varepsilon/2}+\underbrace{\|a_j-a\|}_{\leq\varepsilon/2} \quad {}^{*)}$$

$\Rightarrow$ $\|a_i-a_j\| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$

* $(V_{\mathbb{R}},\|\ \|)$ <u>normierter VR</u>: $\|\ \|: V\to\mathbb{R}$

N1) $\|x\|\geq 0$ u. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

<u>Beisp.</u> 1) $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p}$ $\quad V=\mathbb{R}^N$

heißt l_p-Norm auf V mit $p\in\mathbb{R}$ u. $p\geq 1$.

2) $\|x\|_m = \max_{i=1,\dots,N}\{|x_i|\}$ Maximumsnorm

Bemerk. Abstand $d(x,y):=\|x-y\|$

Anwendungen Fixpunkte u. Iterationsverfahren

geg. $E \subseteq \mathbb{R}$ und
Abb. $f: E \longrightarrow E$

Def. $x^* \in E$ heißt ein Fixpunkt von f.

$$\Longleftrightarrow \quad f(x^*) = x^*$$

Beispiele

1) $g(x) = 0$

$$\boxed{f(x) := x + g(x)}$$

$$f(x^*) = x^* \Longleftrightarrow g(x^*) = 0$$

Beweis $f(x^*) = x^* + g(x^*) = x^* \Rightarrow g(x^*) = 0$

2) $g(x) = b \Leftrightarrow$

$g(x) - b = 0$

$f(x) := x + g(x) - b$

$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow g(x^*) = b$

3) <u>Verallgemeinerung</u> $h(x) = g(x)$

$\left(3 \Rightarrow 1 \; (h(x) = 0) \right.$

$\left. 3 \Rightarrow 2 \; (h(x) = b) \right)$

$h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) = 0$

$f(x) := x + h(x) - g(x)$

$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow h(x^*) = g(x^*)$

<u>Bemerkung</u> $h(x) = g(x)$

$f(x) = x + h(x) - g(x)$

oder $\boxed{f(x) = x + l(x)\left(h(x) - g(x)\right) \quad \text{mit } l(x) \neq 0 \quad x \in E}$

$x^* \in E \quad f(x^*) = x^* \Leftrightarrow$

$l(x^*)\left(h(x^*) - g(x^*)\right) = 0$

$\underset{\substack{l(x) \neq 0 \\ x \in E}}{\Leftrightarrow} h(x^*) - g(x^*) = 0 \Leftrightarrow h(x^*) = g(x^*)$

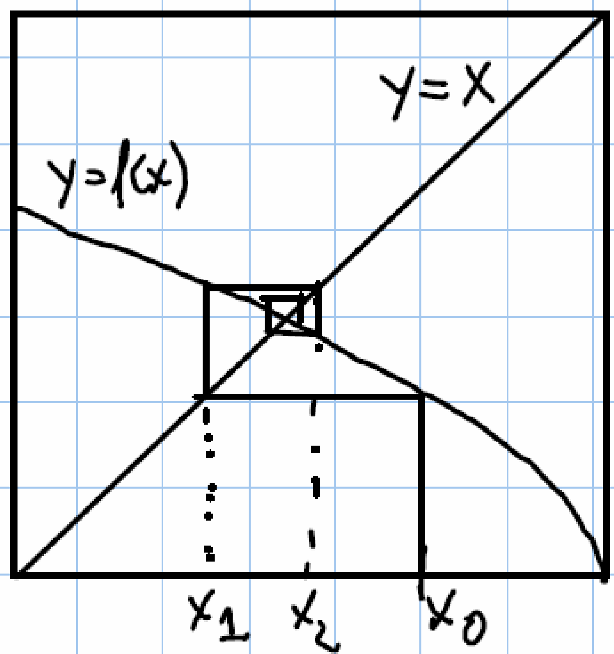
$x_0 \in E$ beliebig

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n) \end{aligned}\right\} \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

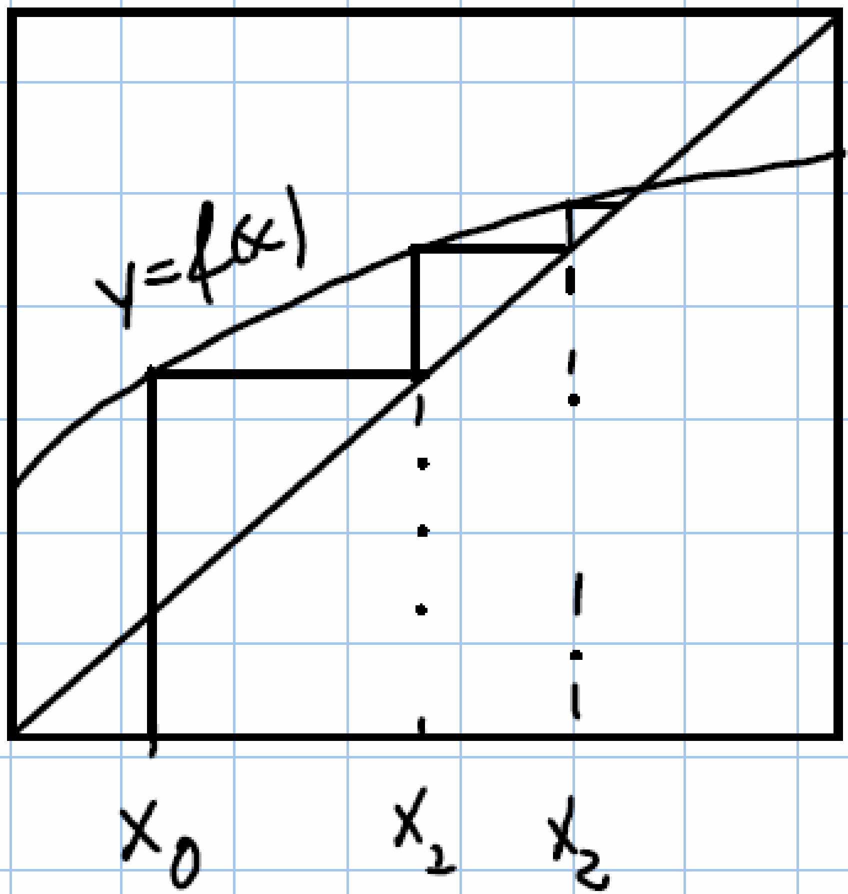
Fixpkt von f.

Graphische Interpretation

1)



2)



Def. $E \subseteq \mathbb{R}$; $f: E \longrightarrow E$

f heißt kontrahierend oder

Lipschitz-beschränkt $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\underset{0 \leq K < 1}{\exists} \; \underset{x,y \in E}{\forall} \; |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|}$$

Satz (Fixpunktsatz)

Sei $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$

Lipschitz-beschränkt mit $K < 1$

(Lipschitzkonstante). Dann gelten

1) Es ex. genau ein Fixpkt $f(x^*) = x^*$ in $[a,b]$.

2) Die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergiert für jedes $x_0 \in [a,b]$ gegen den Fixpkt x^*.

3) Fehlerabschätzung

3a $|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$

a-priori-Abschätzung

3b $|x_n - x^*| \leq \frac{K}{1-K} |x_n - x_{n-1}|$

a-posteriori-Absch.

Beispiele mit Maple

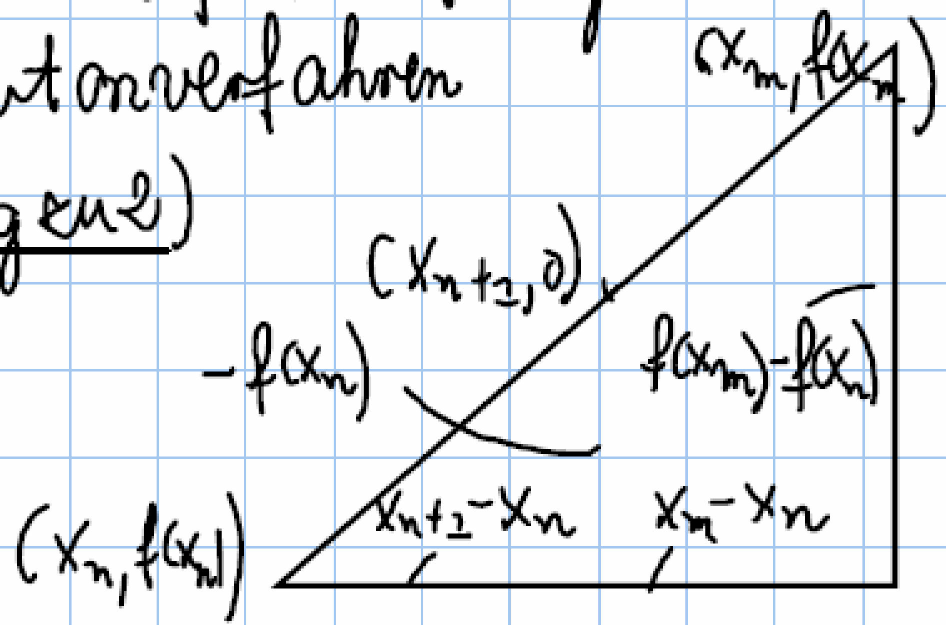
1) Allgemeines Iterationsverfahren für

$$g(x) = h(x)$$

2) Sekantenverfahren (Regula Falsi)

3) Newtonverfahren

Bemerkung zu 2)



$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_m - x_n)}{f(x_m)-f(x_n)}$$

Beweis (Fixpunktsatz)

Schritt 1) Sei $n \geq 0$ u. $j \geq 1$

$$|x_{n+j}-x_n| \overset{*}{\leq} |x_{n+j}-x_{n+j-1}| + \dots + |x_{n+2}-x_{n+1}| + |x_{n+1}-x_n|$$

* $|x_{n+j} + x_{n+j-1} - x_{n+j-1} - x_n|$

$$\leq |x_{n+j}-x_{n+j-1}| + |x_{n+j-1}-x_n|$$

Es gilt $|x_{n+2}-x_{n-1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$

$$\leq K\,|x_{n+1}-x_n|$$

$$|x_{n+3}-x_{n+2}| = |f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})|$$

$$\leq K\,|x_{n+2}-x_{n+1}| \leq K^2\,|x_{n+1}-x_n|$$

$$\Rightarrow \boxed{|x_{n+j}-x_n| \leq \left(K^{j-1} + \dots + K + 1\right) \cdot |x_{n+1}-x_n|}$$

$$= \frac{1-K^{j}}{1-K}^{*)}\,|x_{n+1}-x_n|$$

*) $1 + K + K^2 + \dots + K^{j-1} = \dfrac{1-K^{j}}{1-K}$

(Beweis durch Induktion).