Fraktale

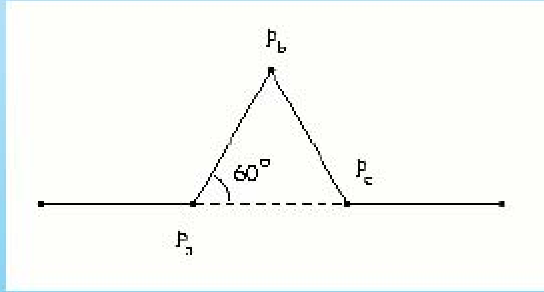
Die Koch Schneeflocke

Helge von Koch 1870 - 1924

Die Koch Schneeflocke

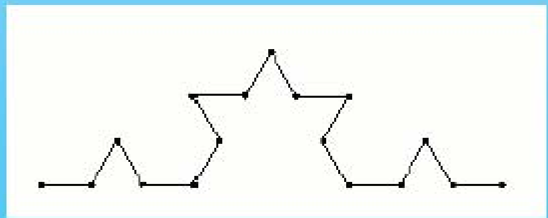
Länge $=1$

Erste Iteration



Länge $=\frac{4}{3}$

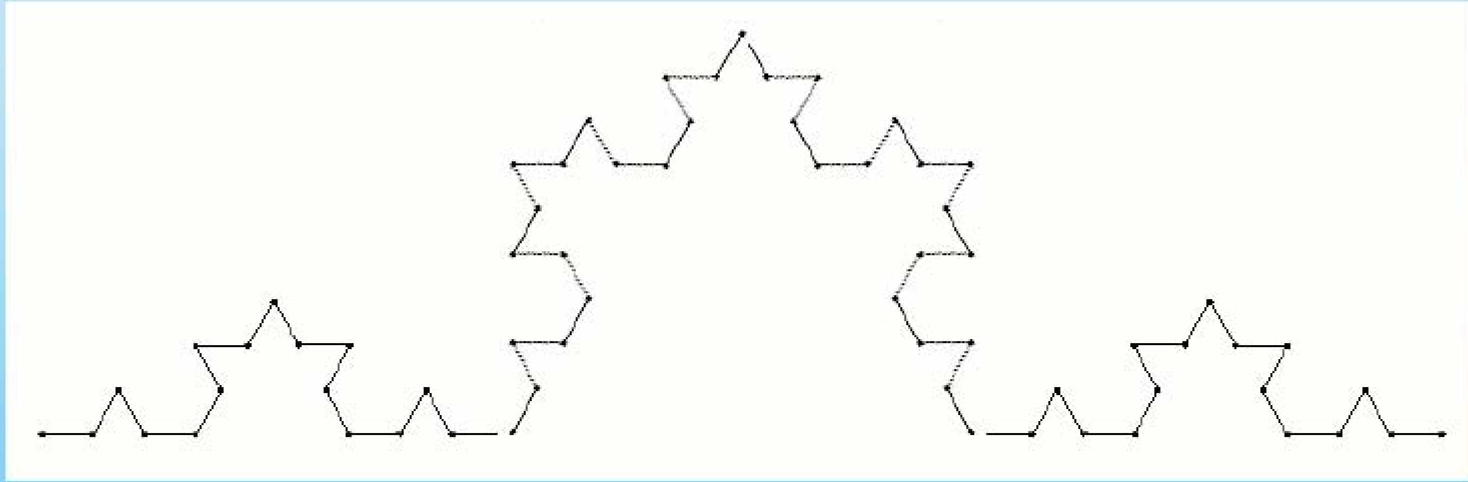
Nach
2 Iterationen



Länge $=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

Schneeflocken

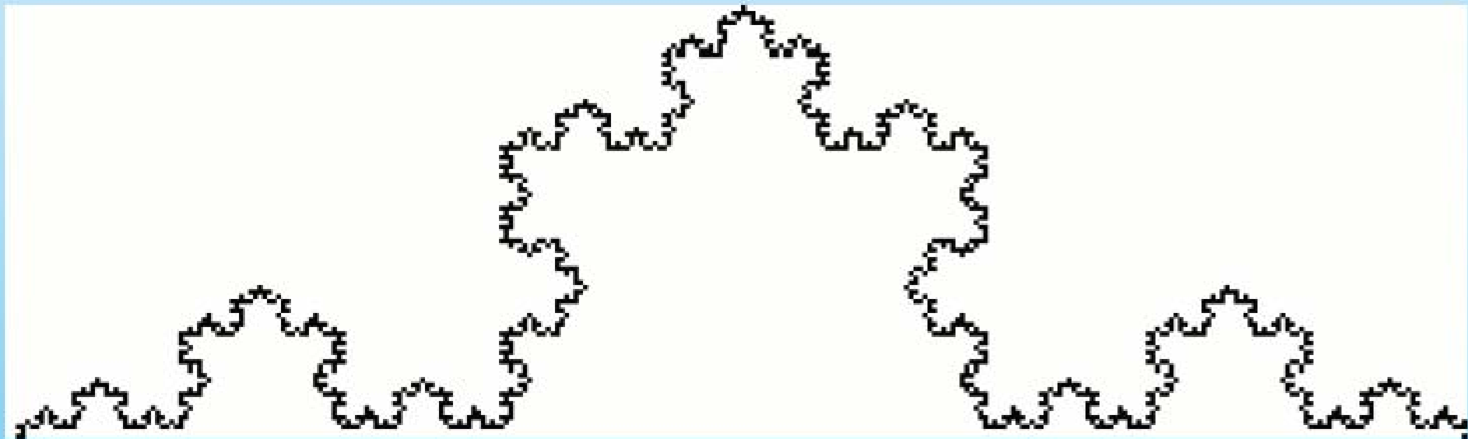
Nach 3 Iterationen



$$Länge = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

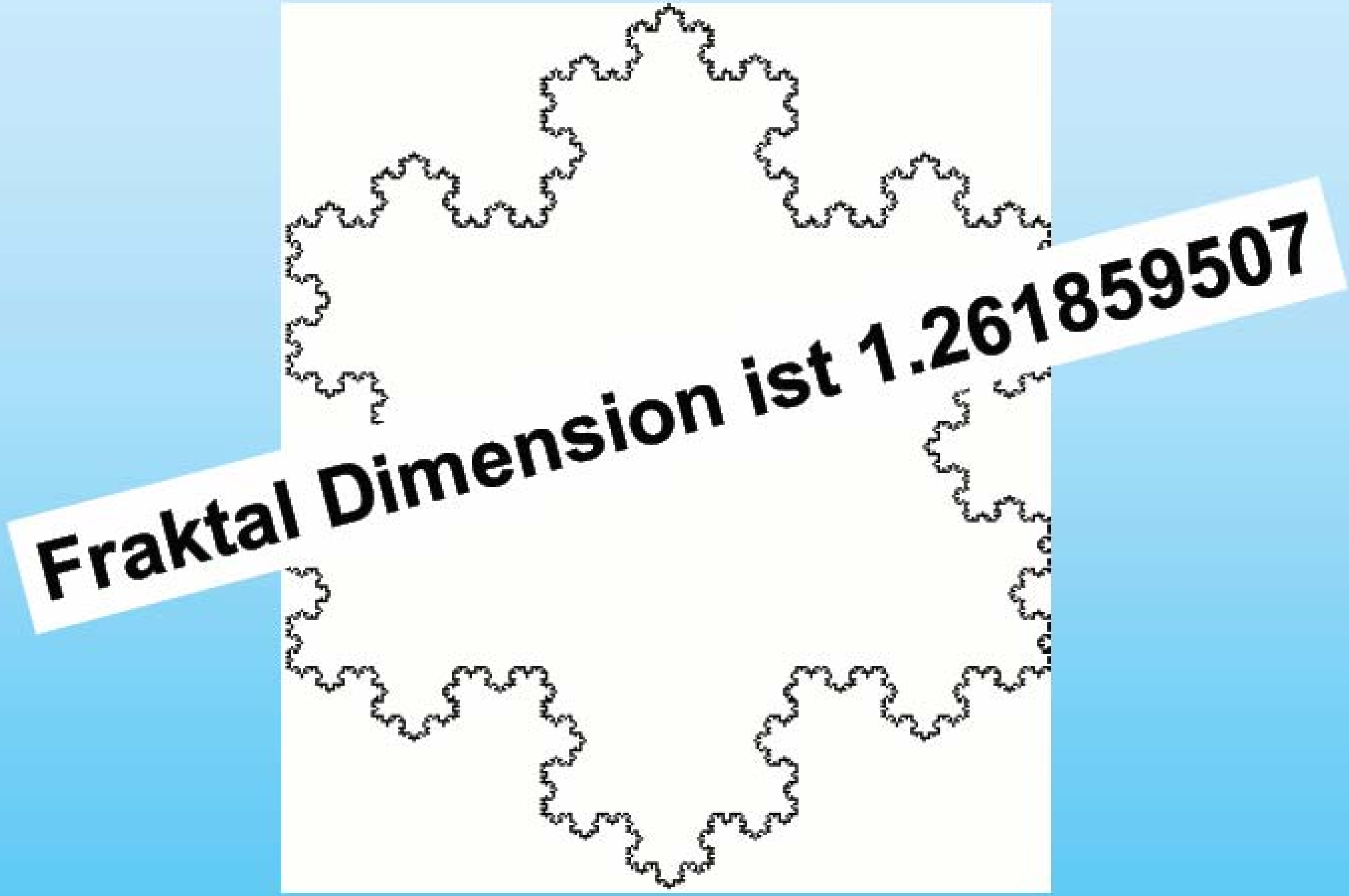
Schneeflocken

Nach *n* Iterationen



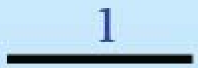
$$Länge = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

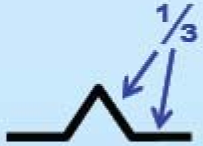
Der Umfang der Koch Schneeflocke ist unendlich . . .



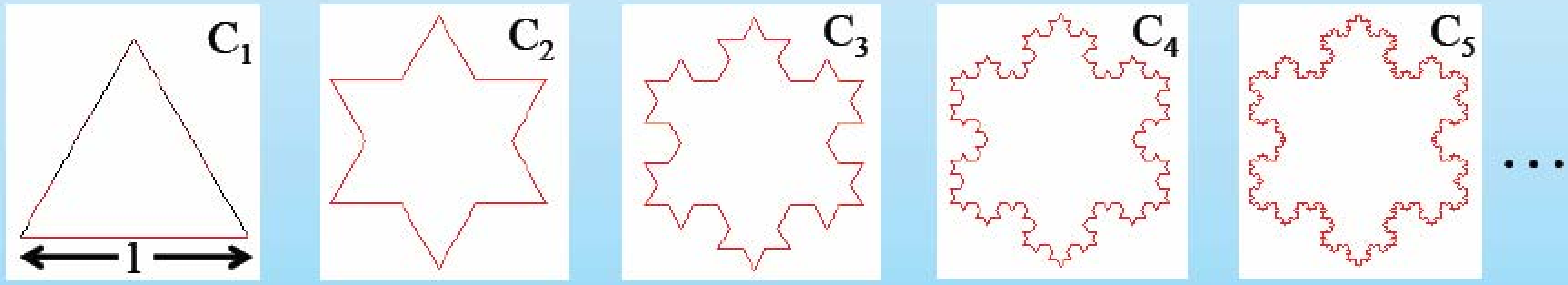
. . . Der Flächeninhalt aber ist endlich !!!

Einschub: Fraktale und gebrochene Dimensionen

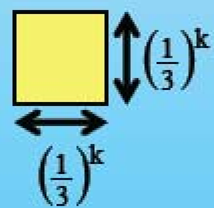
Beispiel: Koch-Kurven: Ersetze 

durch 

ad Infinitum



Koch-Schneeflocke $C = \lim_{k \to \infty} C_k$

Dimensionsberechnung durch Überdeckung von C_k mit N_k Kästchen 

1-dimensionale Figur: $N_{k+1} = 3N_k$

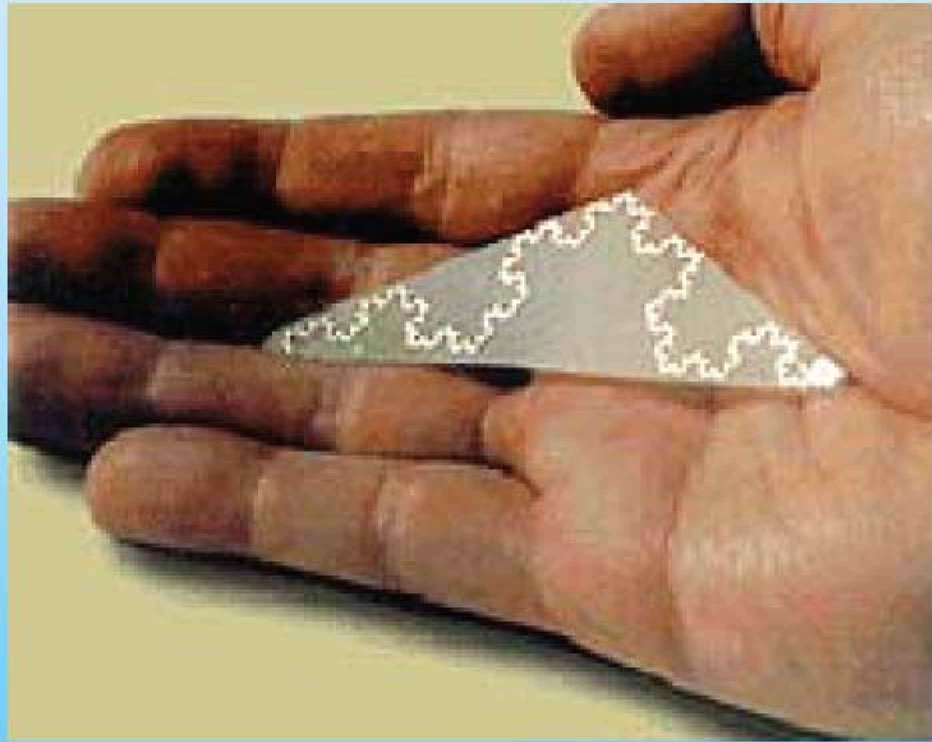
2-dimensionale Figur: $N_{k+1} = 3^2 N_k$

d-dimensionale Figur: $N_{k+1} = 3^d N_k$

Koch-Kurven: $N_{k+1} = 4N_k \quad \Rightarrow \quad 3^d = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26}$

Die Koch Schneeflocke in der Technik:

Fractal Tiling Arrays -- Firm Reports Breakthrough in Array Antennas



Boston - Mar 13, 2002
Fractal Antenna Systems, Inc. today disclosed that it has filed for patent protection on a new class of antenna arrays that use close-packed arrangements of fractal elements to get superior performance characteristics.

Praktischer Nutzen von Fraktalen

Computer systems **(Fractal archivation, picture compressing without pixelization)**

Liquid mechanics

- **Modulating of turbulent stream**
- **Modulating of tongues of flame**
- **Porous material has fractal structure**

Telecommunications **(antennas have fractal form)**

Surface physics **(for description of surface curvature)**

Medicine

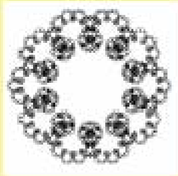
- **Biosensor interaction**
- **Heart beating**

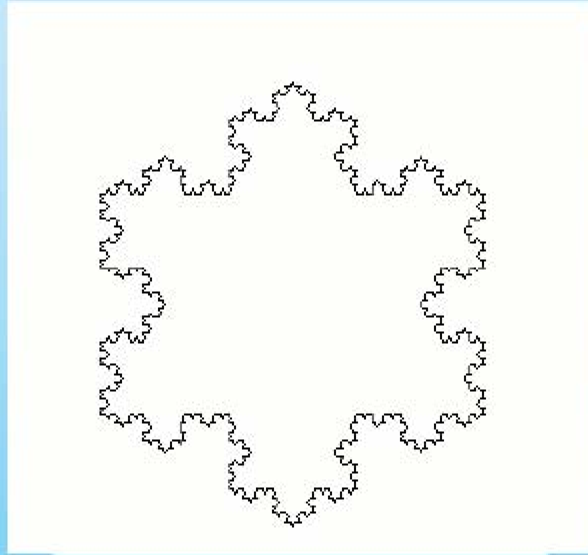
Biology **(description of population model)**

Schneeflocken

Fraktale

Initialprobleme: Kurve





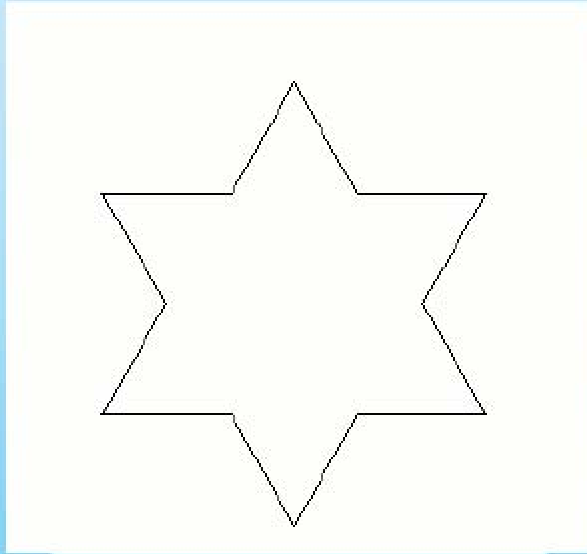
Schneeflockenkurve oder Kochsche Kurve

nach H. Koch (1904)

Schneeflocken

Fraktale

Initialprobleme: Umfang



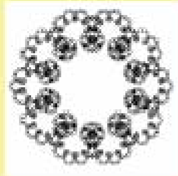
$$\text{Umfang } U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3 \cdot a$$

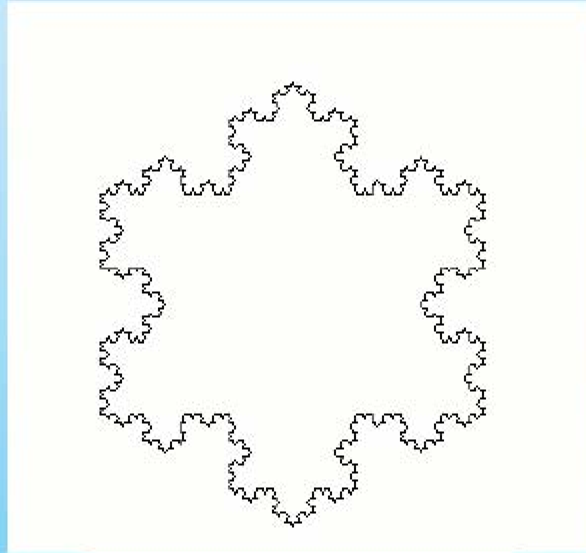
$$\lim_{n \to \infty} U_n = \infty$$

Schneeflocken

Fraktale

Initialproblem: Fläche



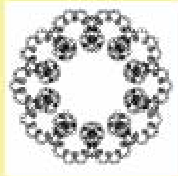


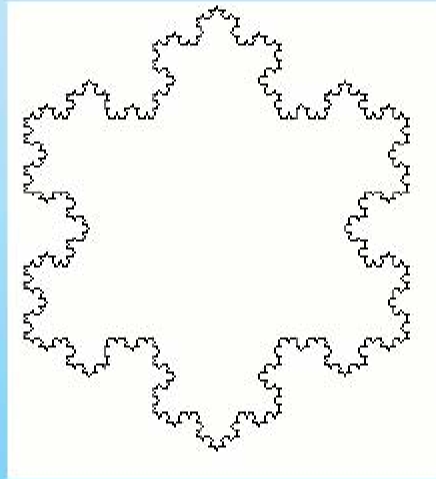
$$\text{Flächeninhalt } A_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right) \cdot a^2$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$$

Schneeflocken

Fraktale

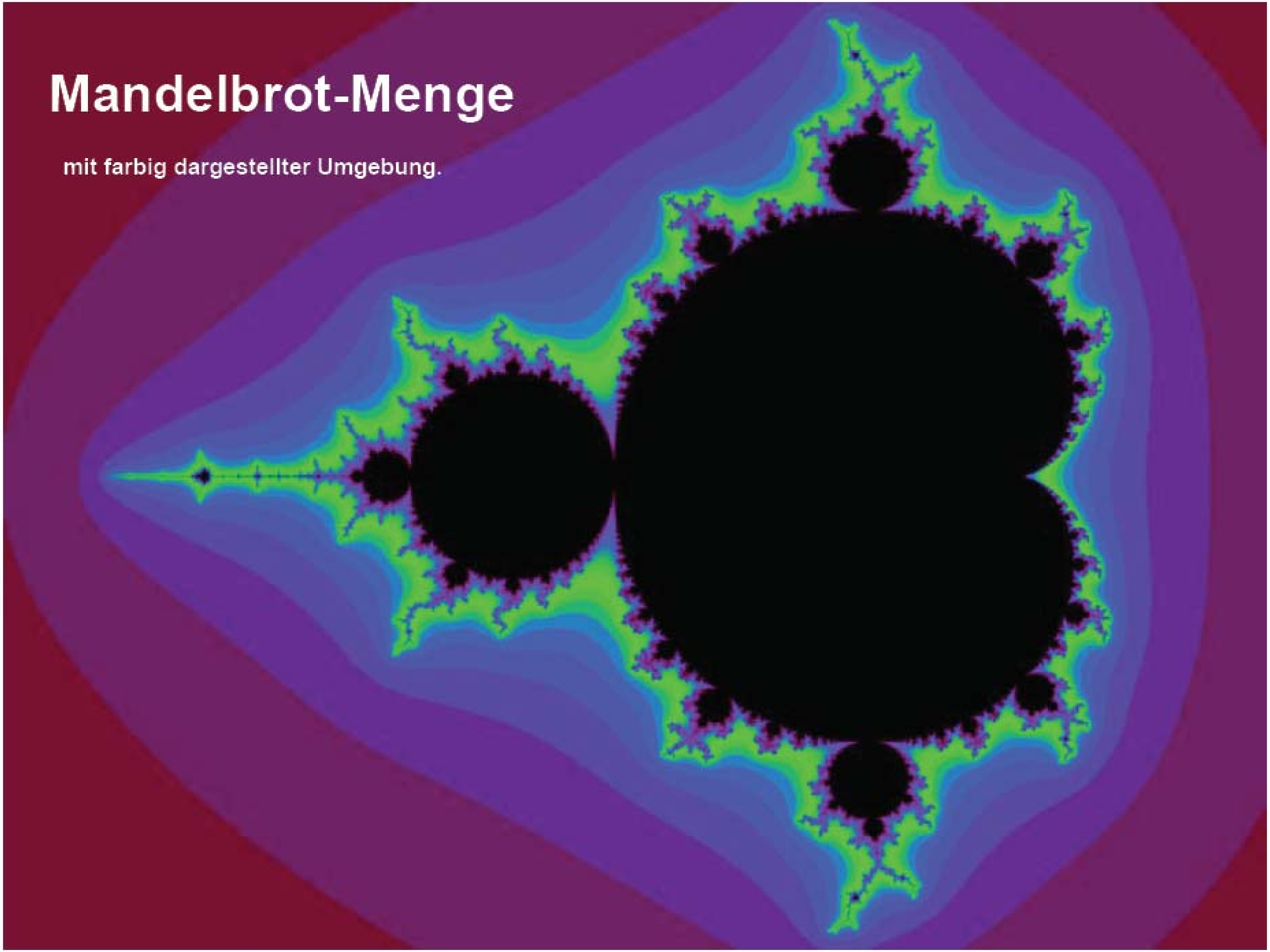




Eine unendliche lange Linie begrenzt

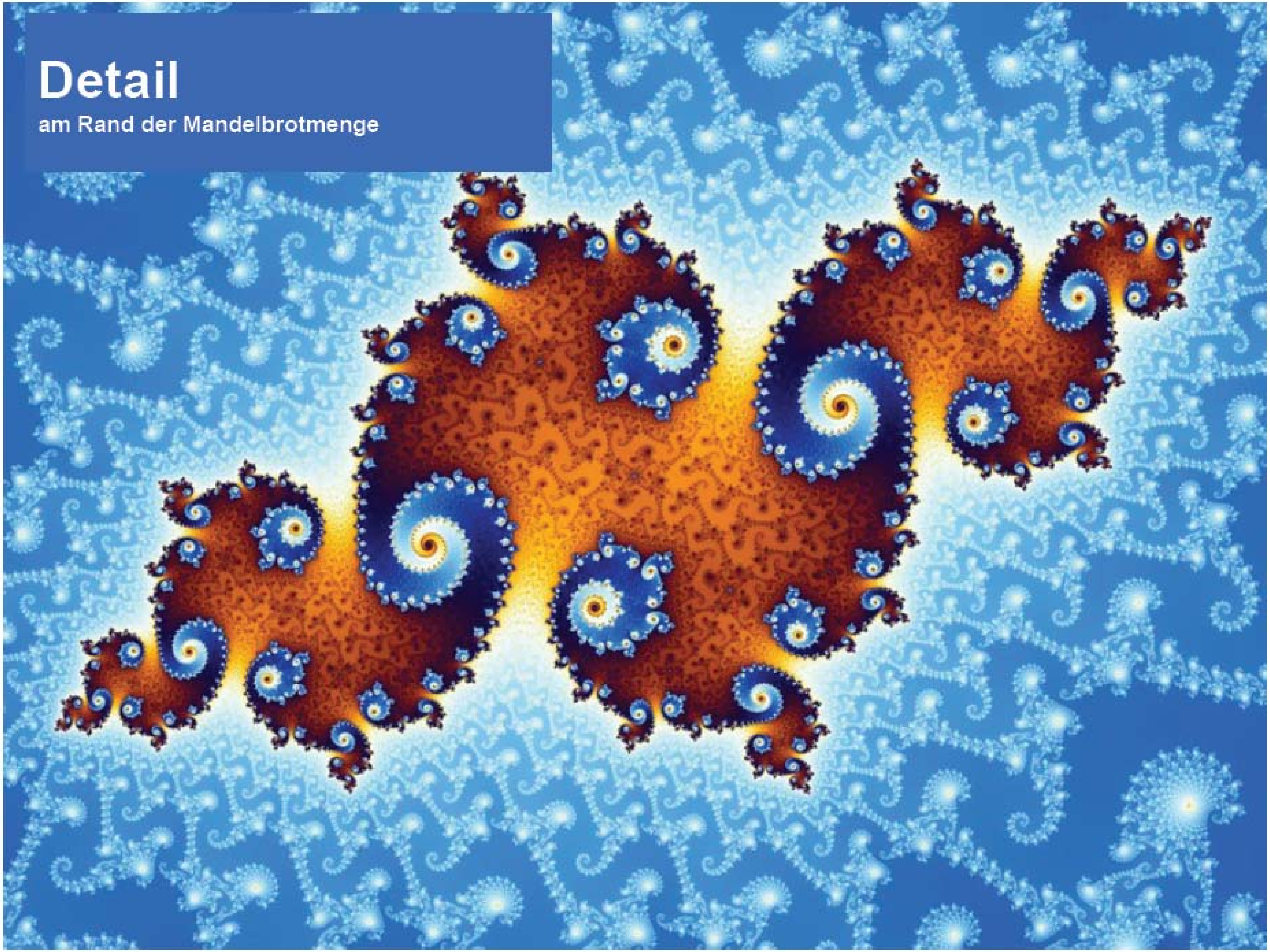
also eine endliche Fläche

Mandelbrotmenge

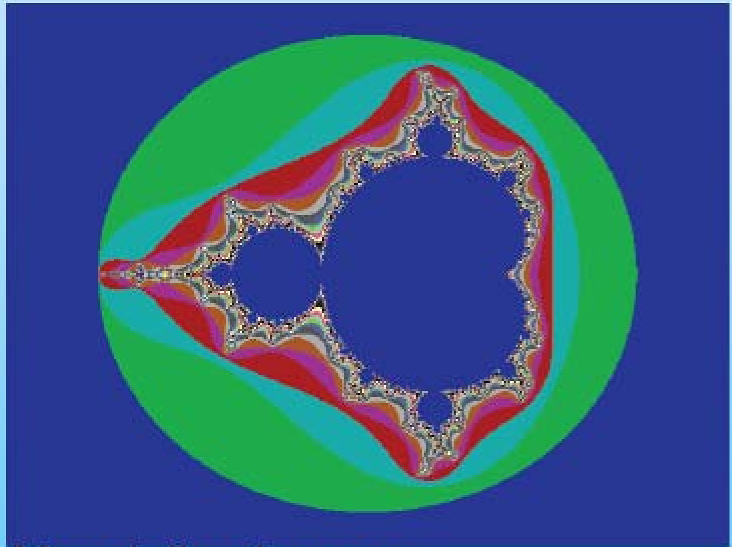

Mandelbrot-Menge
mit farbig dargestellter Umgebung.

Detail

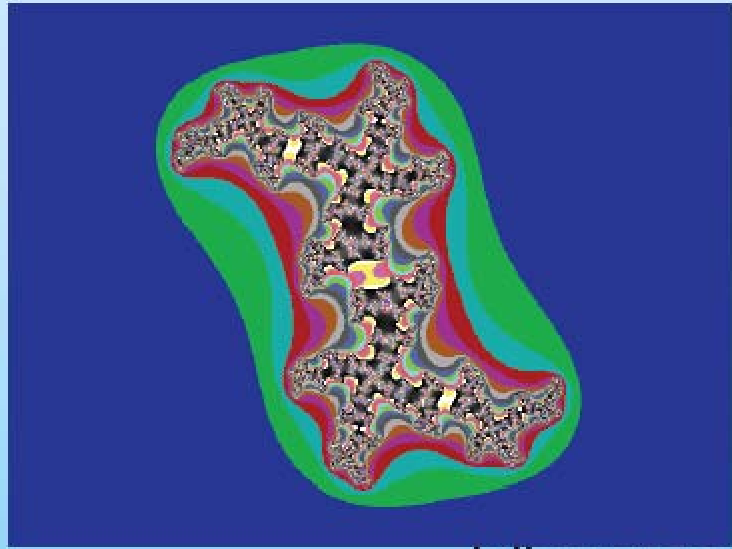
am Rand der Mandelbrotmenge



1. Was sind Fraktale?



Mandelbrotmenge



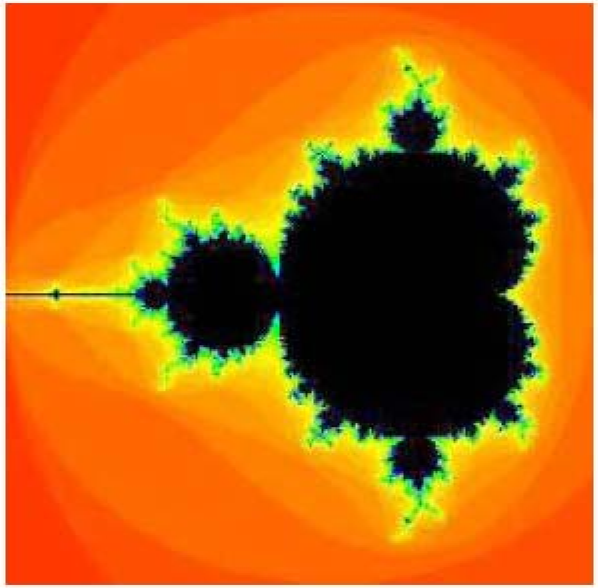
Juliamenge

$$z_{n+1} = z_n^{\,2} + c$$

Benoit Mandelbrot:

Ein fragmentiertes geometrisches Gebilde, das in Teile zerlegt werden kann, die (nahezu) eine kleine Kopie des ganzen Gebildes sind.

Mandelbrot-Menge



- **Mandelbrot-Menge**
- **Wahl einer komplexen Zahl *c***
- **Folge z_n**

$$z_0 = 0 \quad \text{(Startwert)}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad \text{(Rekursion)}$$

- **Konvergiert die Folge?**
- **Wenn ja, gehört *c* zur Mandelbrot-Menge**

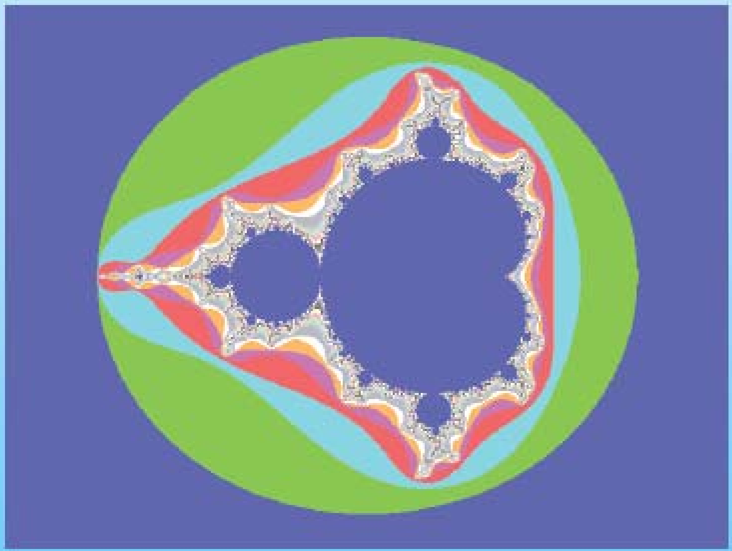
$$\mathbf{z_{n+1} = z_n^{\,2} + c}$$

- rekursive Definition
- z_n und c sind Komplex

Mandelbrotmenge

- $\mathbf{z_0}$ ist meist 0 (konstant)

- für verschiedene c wird die Iteration ausgeführt



- Alle c für die $\mathbf{z_n}$ konvergiert ⟶ Mandelbrotmenge
- Anzahl der Iterationen ⟶ Farbe

Die Iteration bleibt gleich: $z_0 = c$; $z_1 = z_0^2 + c$; ...

Jetzt wird allerdings geschaut, nach der wievielten Iteration der Abstand eines Punktes zum Ursprung größer als 2 wird.

Nach n Iterationen	Farbe
1	graublau
2	hellgrau
3	rot
4	weiß
5	cyan
6	magenta
7	orange
8	grün
9	gelb
wenn nach 150 Iterationen der Abstand immer noch < 2 ist	schwarz

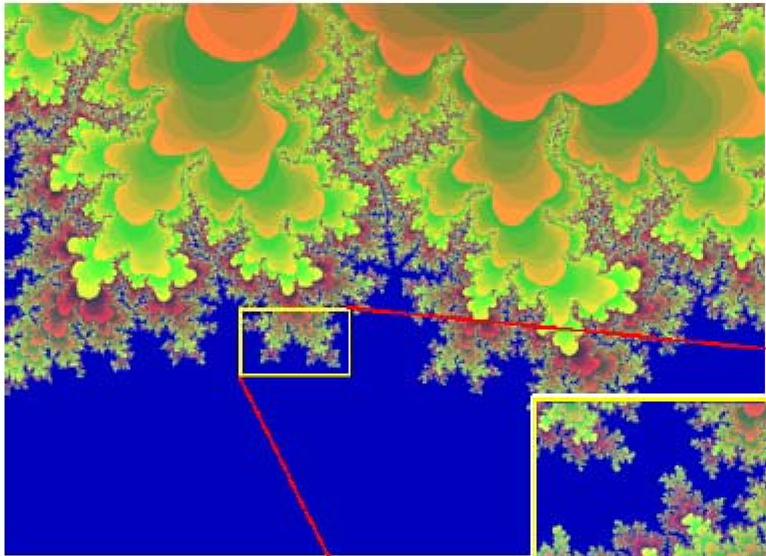
Dies ist nur ein Beispiel für eine der vielen Farb-Möglichkeiten !!

Maplecode für Mandelbrotmenge

mit Graphikausgabe

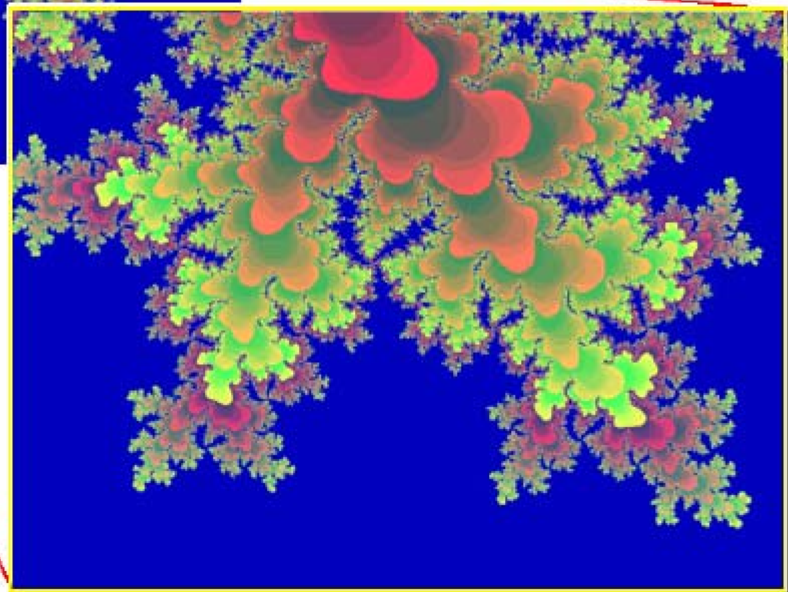
```
> with(plots):
mandelbrotSet := proc(x,y)
        local z, m;
        z:=evalf(x + y*I);
        m:=0;
        to 10 while abs(z) < 2 do
                z:=z^2+(x+y*I);
                m:=m+1;
        od:
        m;
end:
plot3d(mandelbrotSet, -2..1, -3/2..3/2, grid=[81,81],
scaling=constrained, style= wireframe,  orientation = [-115,3]);
```

Wichtige Eigenschaften der Fraktale



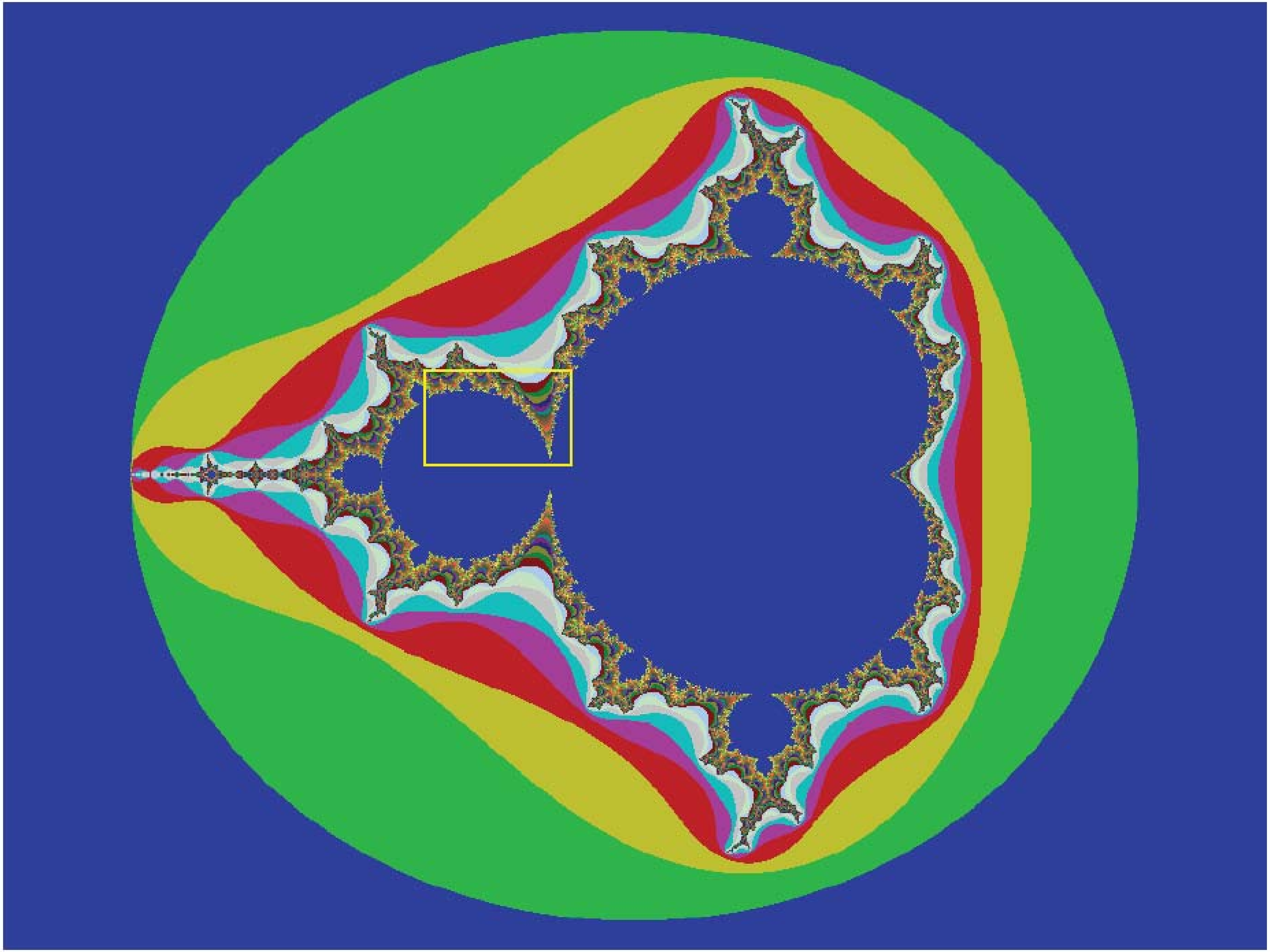
Selbstähnlichkeit

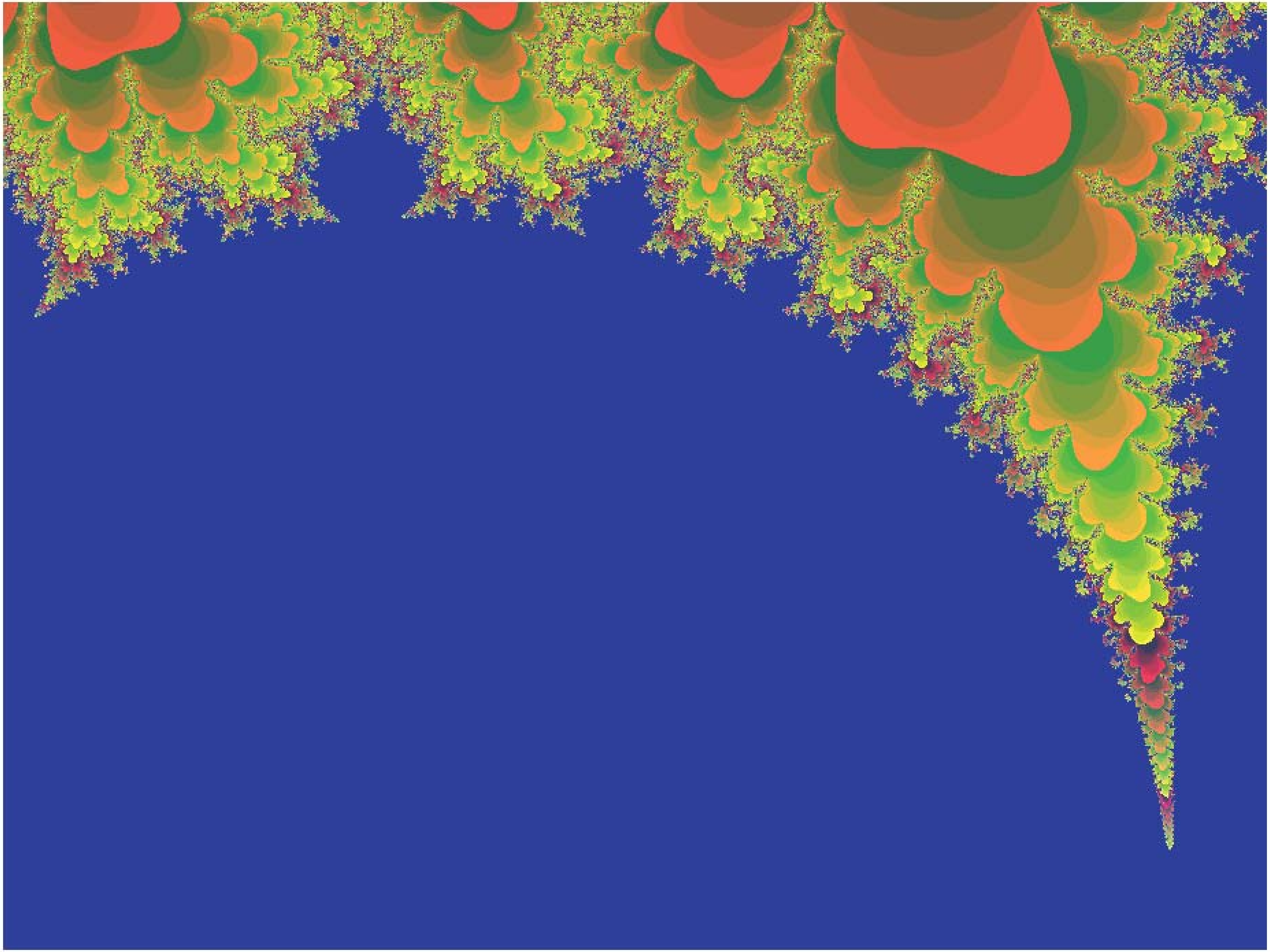
Man kann an das Fraktal heranzoomen und erkennt Formen oder Strukturen, die schon einmal auftraten.

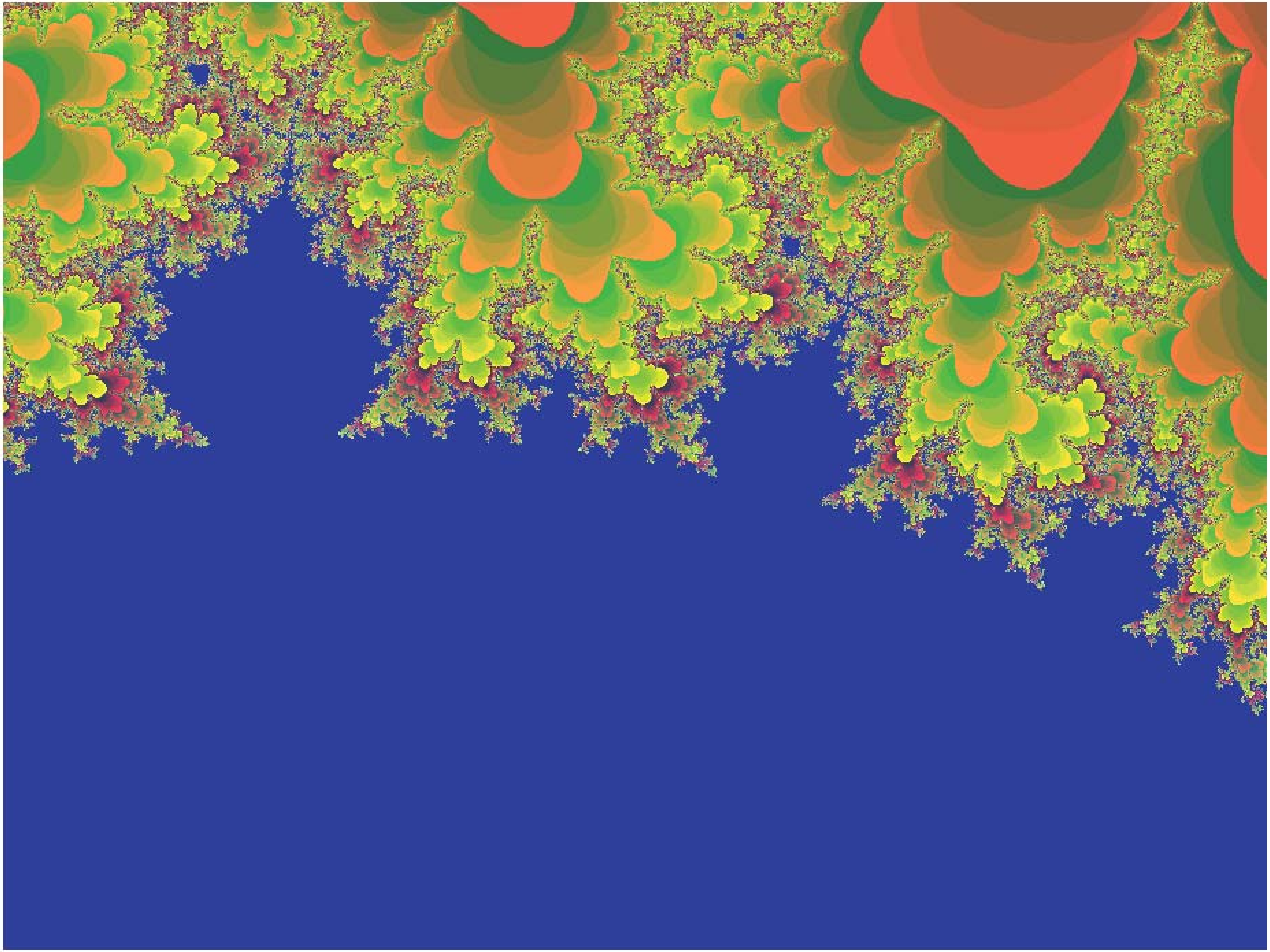


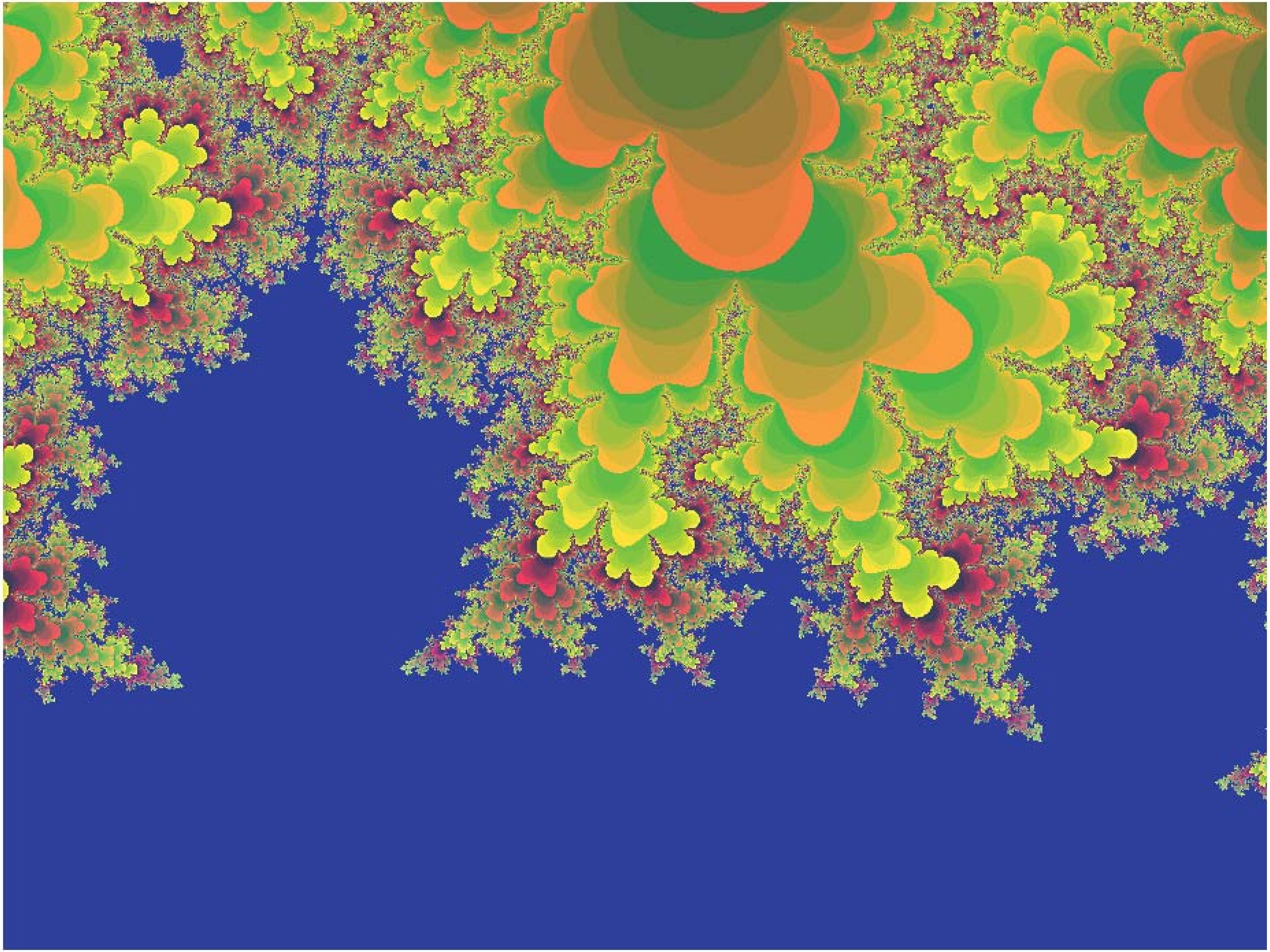
Fraktale Dimension

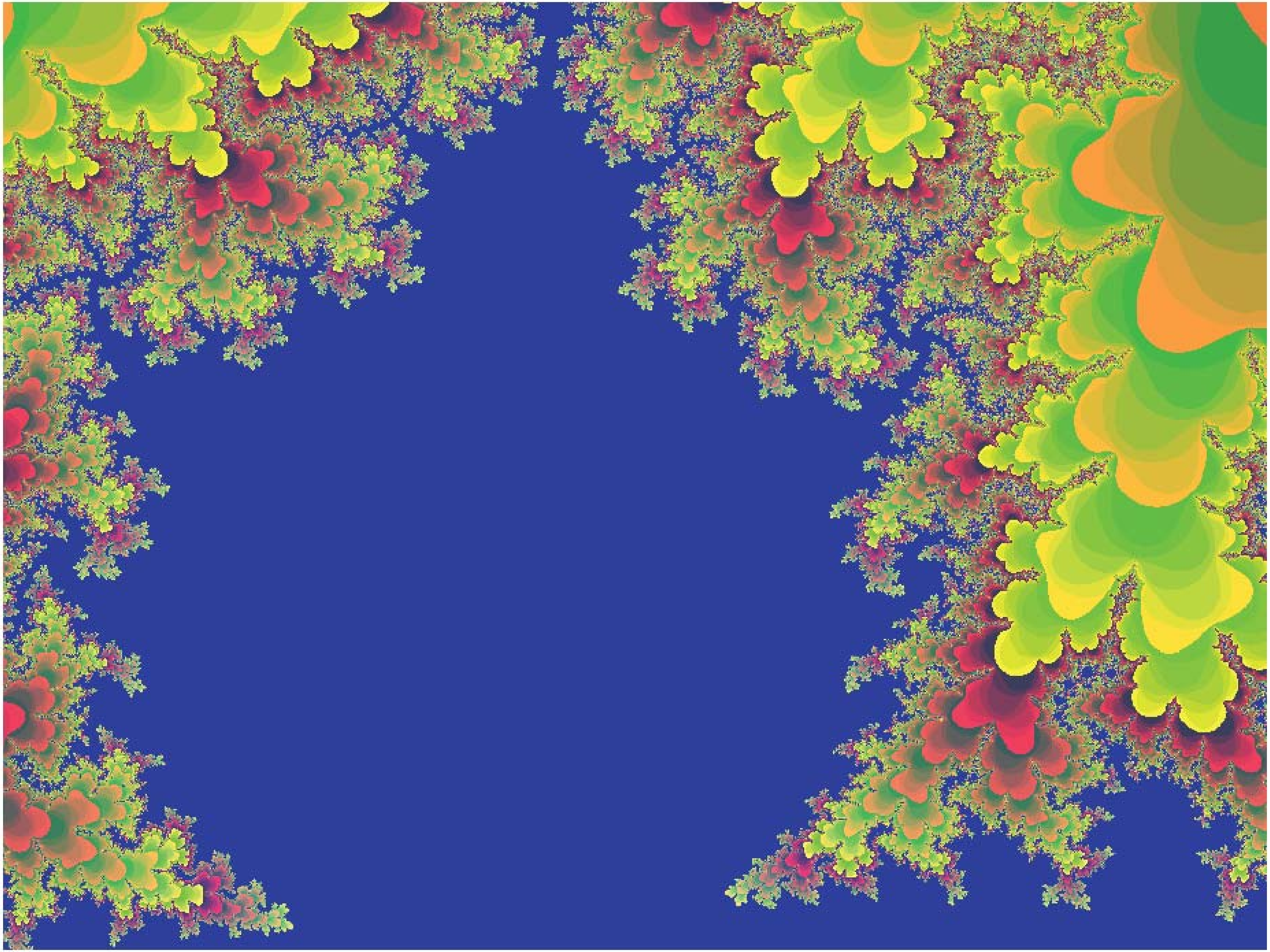
Ein Fraktal ist ein Objekt, dessen fraktale Dimension zwischen 1 und 2 bzw. 2 und 3 liegt.

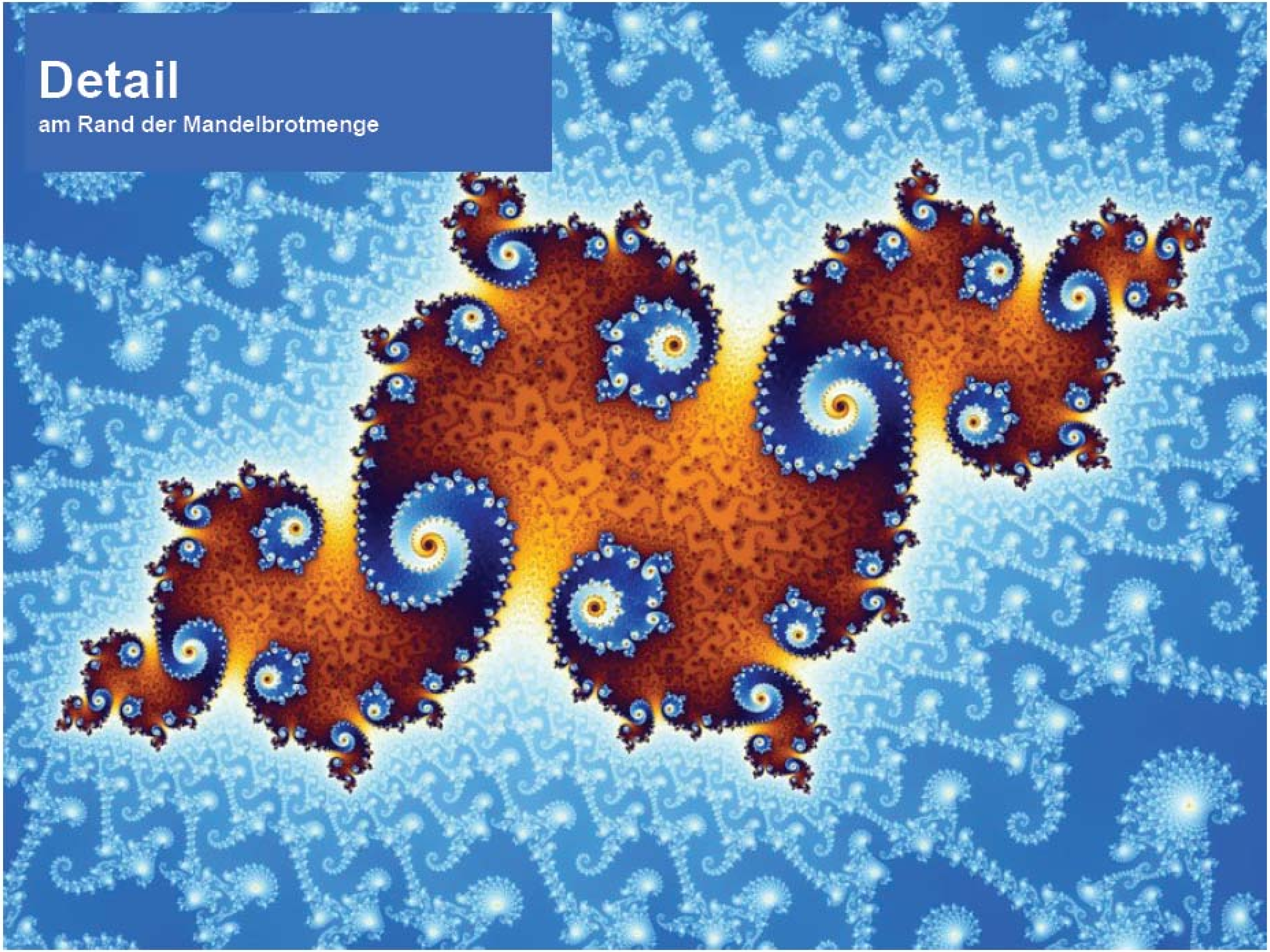











Detail
am Rand der Mandelbrotmenge