Metrische Räume

Metrik

Definition Sei $X \neq \emptyset$. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow$ R+ heißt **Metrik**, falls für

alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt:

(M1) $d(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ (Definitheit)

(M2) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (Symmetrie).

(M3) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$ (Dreiecksungleichung)

(X, d) heißt dann **metrischer Raum**.

Man beachte, dass keine Addition in X erklärt ist.

Metrische Räume
Beispiele

a) $X = R$, $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ ist metrischer Raum.

b) $X = R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in R, j = 1, \dots, n\}$ ist mit

$$d(x, y) = \max_{j=1,\dots n.}\{|x_j - y_j|\}$$ ein metrischer Raum

c) $X = C_0([a, b],R) = \{f : [a, b] \to R \mid f \text{ ist in } [a, b] \text{ stetig}\}$ ist mit

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]}\{ |f(x) - g(x)|\}$$

ein metrischer Raum, wobei natürlich $f = g :\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ sei.

Metrische Räume
Beispiele

d) X = $C_0([a, b],R)$ ist mit

$$d(f,g) = (\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx)^{1/2}$$

ein metrischer Raum.

e) **Hammingabstand**

Sei $X := \{0,1\}^n = \{(a_1,\ldots,a_n); a_i \in \{0,1\}\}$

Die Elemente von X heißen Codewörter.
Sind a, b zwei Codewörter, dann ist eine Metrik definiert durch
d(a,b) := Anzahl der verschiedenen Stellen von a und b

d((0,0,1,0,0,1,1,0), (1,1,0,0,1,1,1,0) ist also 4.

Metrische Räume

Konvergente Folgen

Sei ($X; d$) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$.

Die Folge heißt **konvergent**, falls es ein $a \in X$ gibt mit:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ mit}$$
$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Das Element a heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bezeichnung:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a.$$

Metrische Räume

Konvergenzkriterien

Sei $(X; d)$ ein metrischer Raum, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus X.

Wie kann man erkennen, ob die Folge konvergiert, *ohne* den Grenzwert zu benutzen?

Notwendige Kriterien

1. Eine konvergente Folge ist beschränkt.
2. Cauchy-Kriterium

Eine konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Metrische Räume

Definition Eine Folge heißt ***Cauchy-Folge*, falls gilt:**

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ mit}$$
$$d(a_n, a_k) < \varepsilon \quad \forall\, n, k \geq n_0.$$

Ein metrischer Raum (*X, d*) heißt **vollständig** , falls jede Cauchyfolge in *X* konvergiert, d.h.

ist (a_n; $n \in N$) eine Cauchy-Folge so gibt es ein $a \in X$ mit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ mit}$$
$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Metrische Räume

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontraktive Abbildung (Kontraktion),

d.h. es gibt ein $q \in [0, 1)$, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq q\, d(x_1, x_2).$$

Dann gibt

1. Es gibt genau ein $x* \in X$, so dass $f(x*) = x*$

2. Die Folge

$$x_{n+1} = f(x_n) \; (n = 0, 1, ...)$$

konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt $x* \in X$.

Metrische Räume

Es gelten die a-priori-Abschätzung

$$d(x_*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

und die a-posteriori-Abschätzung

$$d(x_*, x_n) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$$

Metrische Räume

Zusammenhang

$$\boxed{(a_n) \text{ konvergent}}$$

$$\Downarrow \qquad \Uparrow$$

(X,d) ist vollständig

$$\boxed{(a_n) \text{ Cauchy-Folge}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(a_n) \text{ beschränkt}}$$