Funktionen mehrerer Veränderlicher

Normen in einem Vektorraum

Definition (Norm, Abstand und normierter Vektorraum)

Sei E ein Vektorraum über R

Eine Funktion $\| \cdot \| : E \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|$ heißt Norm, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

a) $\|x\| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbf{R}, x \in E$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$

$\|x - y\|$ heißt Abstand zwischen x und y.

Das Paar $(E, \| \cdot \|)$ heißt normierter Vektorraum.

Grenzwerte von Funktionen

Sei $E(\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum

Definition. Sei T $\subset$ E eine Teilmenge
x$\in$ E heißt **Berührungspunkt** von T genau dann,
wenn x$\in$ E oder x$\in$ Rand(E).

$\overline{E}$:=E U Rand(E) heißt die **abgeschlossene Hülle** von E

$f(120, 25, Nacht) = 12,$

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel

Die **Kosten *K* eines Telefongesprächs** hängen bei den meisten heute üblichen Tarifen von drei Größen ab:

- der Dauer *d* des Gesprächs
- der Entfernung *e* zwischen den Gesprächspartnern
- der Tageszeit *t*

Die Kosten stellen sich also als eine Funktion dreier Variabler dar:

$$K = f(d,e,t).$$

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

Funktionen mehrerer Veränderlicher

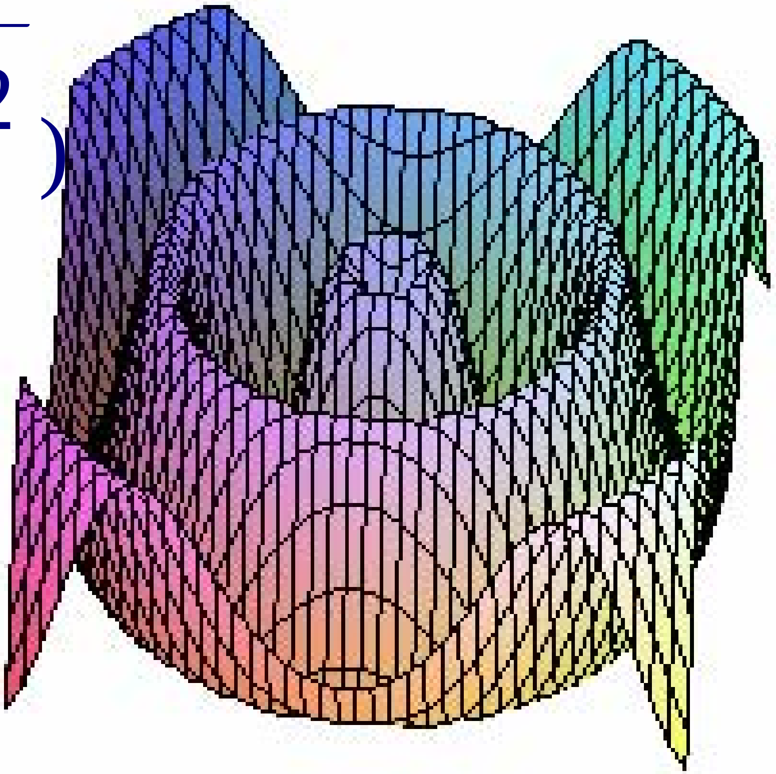
Phänomene der realen Welt hängen im Allgemeinen nicht nur von einem einzigen Parameter ab.

Je mehr Parameter unsere mathematischen Modelle berücksichtigen können, desto mehr Phänomene können wir modellieren.

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiele

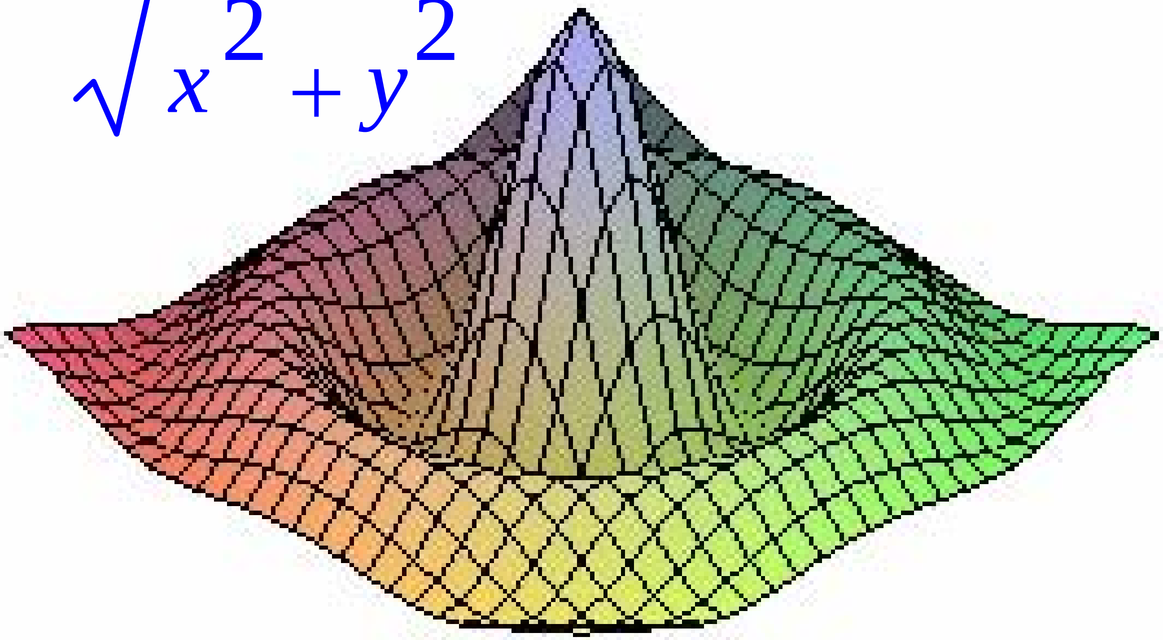
f(x,y):= $\sin\left(6\sqrt{x^2+y^2}\right)$



Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiele

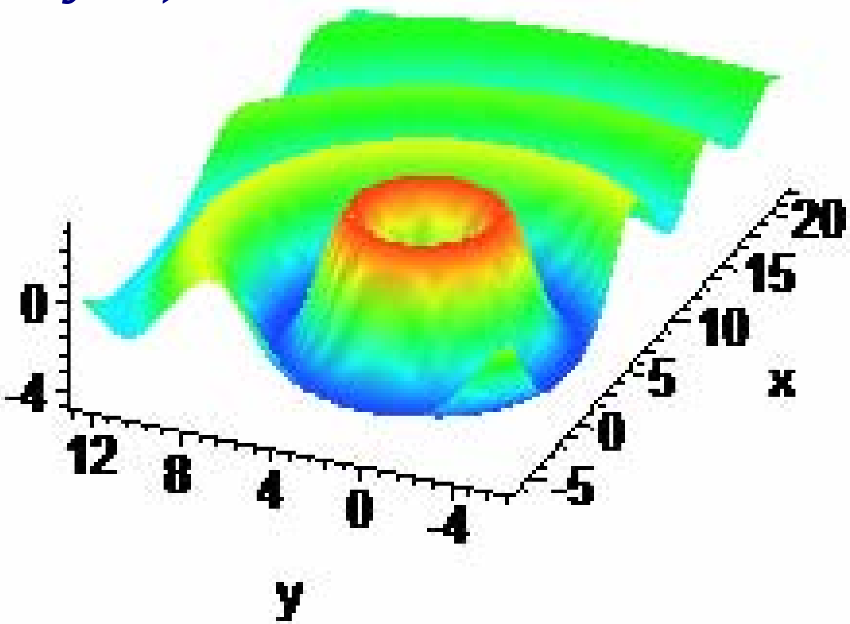
$$f(x, y) := \frac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiele

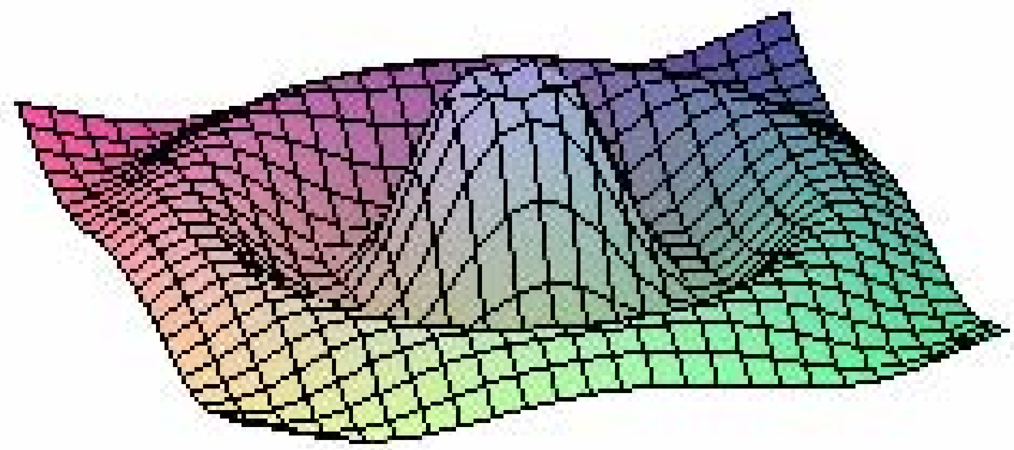
f(x,y):= $-5\cos(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathbf{e}^{(-.1\sqrt{x^2+y^2})}$



Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiele

$$f(x, y, t) := -\frac{\sin\left(-\sqrt{x^2+y^2}+t\right)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$



> with(plots):

> animate3d(f(x,y,t), x=-3*Pi..3*Pi, y=-3*Pi..3*Pi, t=0..2*Pi);

Grenzwerte von Funktionen

Definition (Konvergenz, Grenzwert von Funktionswerten)

Seien E und F normierte Räume und f: $D \subset E \rightarrow F$ eine Abbildung und x_0 ein Berührungspunkt von D.

Man sagt, $f(x)$ konvergiert gegen c für x gegen x_0, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(y_n)_{n\in N}$ aus D stets die Bildfolge $(f(y_n))_{n\in \mathbf{N}}$ gegen c konvergiert.

Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c.$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz (ε–δ–Kriterium für Konvergenz)

Seien E und F normierte Räume und f: D ⊂ E → F eine Abbildung und x_0 ein Berührungspunkt von D.

Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$,

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein δ>0, so daß für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ stets $\|f(x) - c\| < \varepsilon$ gilt.

c) Zu jedem ε > 0 gibt es ein δ>0 mit f(K(x0, δ) ∩) D) ⊂ K(c, ε)

Grenzwerte von Funktionen

Satz (Rechenregeln für Grenzwerte I)

Seien $E\ (\|\cdot\|)$ und $F\ (\|\cdot\|)$

normierte Vektorräume und f,g: $D \subset E \rightarrow F$ Abbildungen und x_0 ein Berührungspunkt von D.

a) Es mögen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\|f(x)\| = \left\|\lim_{x\to x_0} f(x)\right\|.$$

b) Sei zusätzlich $h: D \rightarrow \mathbf{R}$, und es existiere $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} h(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz (Rechenregeln für Grenzwerte II)

Sei $E(\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum

$f, g : D \subset E \to F$ Abbildungen, und x_0 sei ein Adhärenzpunkt von D.

f,g D $\subset$ E → R Abbildungen und x_0 sei ein Berührungspunkt von D

Es mögen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz (Rechenregeln für Grenzwerte III)

Seien E und F normierte Räume

Die Norm auf F sei von einem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ induziert.

Seien $f, g : D \subset E \to F$ Abbildungen, und x_0 sei ein Berührungspunkt von D.

Es existiere $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)|g(x)) = (\lim_{x \to x_0} f(x)| \lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz (Konvergenz und koordinatenweise Konvergenz)

Seien $D \subset E$ und $f: D \to F = \mathbf{R}^d$

$$\text{Sei } f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ genau dann, wenn für jede einzelne Koordinaten-funktion $f_j(x)$ gilt: $\lim_{x \to x_0} f_j(x) = c_j$

Stetigkeit

Definition(Stetigkeit)

Seien E und F normierte Räume

Seien $f : D \subset E \to F$ eine Abbildung und $x_0 \in D$.

a) f heißt stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

b) Ist f in jedem Punkt von D stetig, so heißt f stetig.

Stetigkeit

Satz_(ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit)

Sei $f: D \subset E \to F$ gegeben. Sei $x_0 \in D$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) f ist in x_0 stetig.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ stets $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ ist.

c) Zu jedem ε > 0 gibt es ein δ>0 mit $f(K(x_0, \delta) \cap) D) \subset K(f(x_0), \varepsilon)$

weiter Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

Sei f: $\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^d$ eine Abbildung

Jedes $f(x)$ hat also die Form $\mathrm{f(x)} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}$ mit $f_j : D \to \boldsymbol{R}$.

f ist in x_0 genau dann stetig, wenn jede Koordinatenfunktion f_j in x_0 stetig ist.