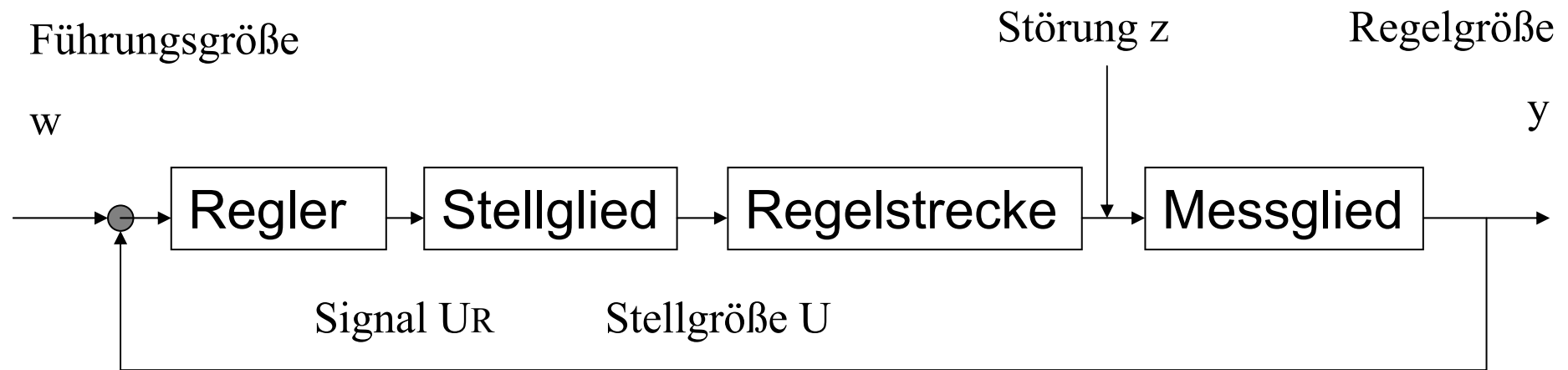


# Steuern Regeln I



Nach H. Unbehauen (1989): Regelungs- und Steuerungstechnik, In: Hütte – Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, S. I1-I191

# Systemeigenschaften und ihre Modellierung

**Linear**

**Parameter: konzentriert**

**Zeit: invariant**

diskret

**deterministisch**

**stabil**

**Nichtlinear**

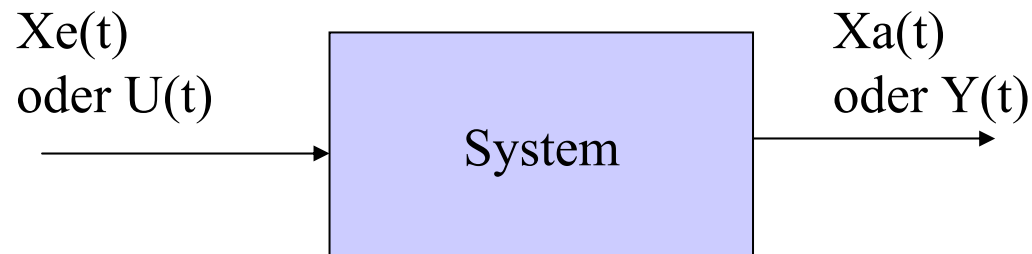
verteilt

variant

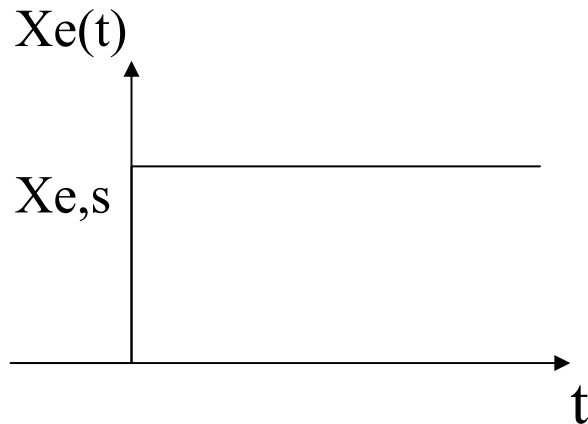
**kontinuierlich**

stochastisch

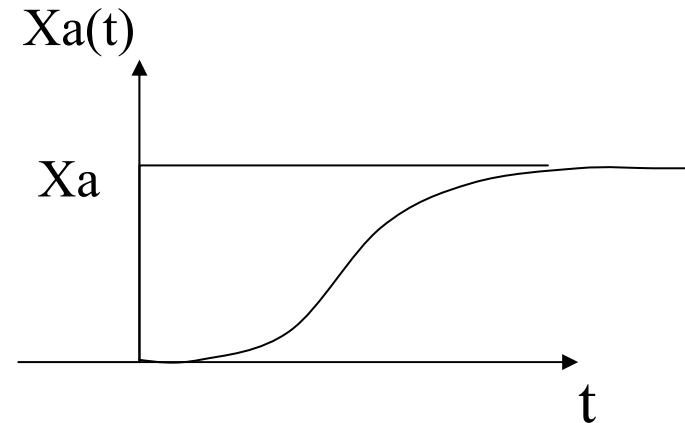
**instabil**



# Statisches Verhalten (Beharrungsverhalten)



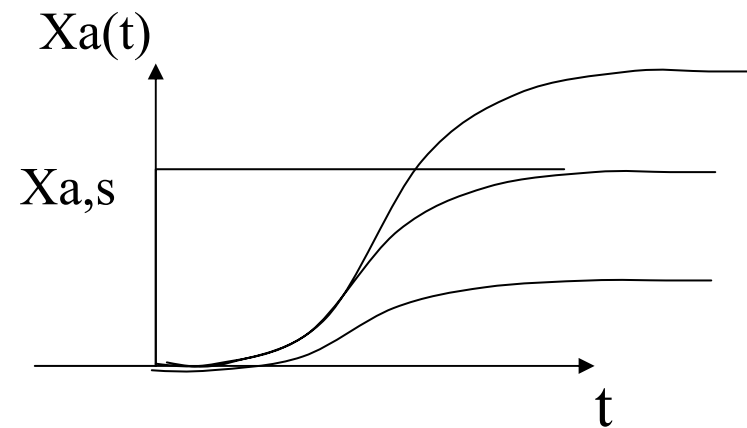
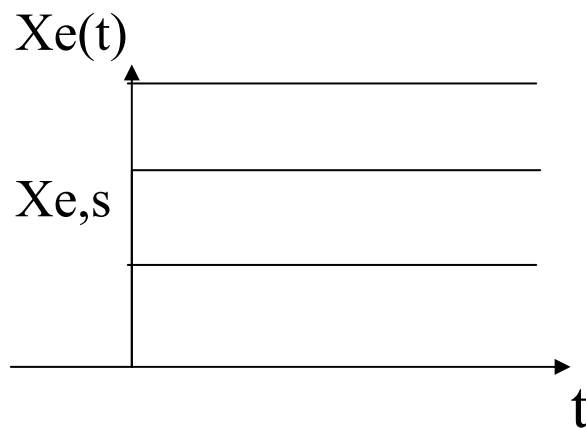
Sprungfunktion als Eingang



Statischer Endzustand

Eingangsgröße  $X_e(t)$   
Ausgangsgröße  $X_a(t)$

Sprungfunktion versch. Amplituden  
Stationärer Zustand  $X_{e,s}$   $X_{a,s}$

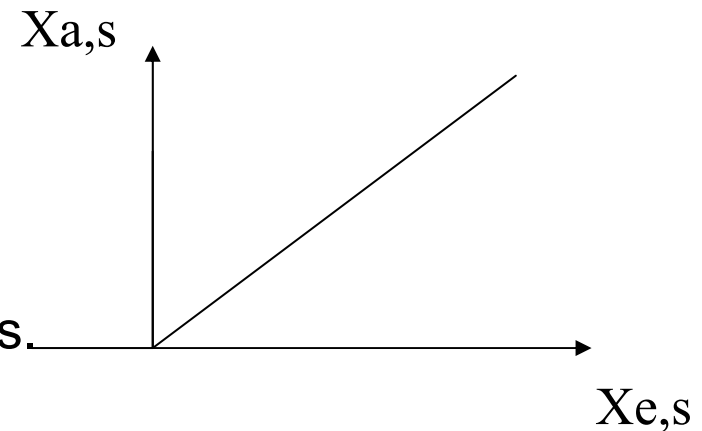


# Linearität

Die statische Kennlinie

$$X_{a,s} = f(X_{e,s})$$

beschreibt statisches Verhalten des Systems.



Ist  $f()$  linear, dann ist das System LINEAR und es gilt das

Superpositionsprinzip: Summe Eingänge  $\Rightarrow$  Summe Ausgänge

Lineare kontinuierliche Systeme sind modellierbar durch  
Lineare DGL

$$\sum_i a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} X_a(t) = \sum_j b_j(t) \frac{d^j}{dt^j} X_e(t)$$

# A. Beschreibung linearer kontinuierlicher Systeme im Zeitbereich durch

1. Differentialgleichungen

2. Ausgangssignale

- Sprungantwort, normiert = **Übergangsfunktion**

$$h(t) = x_a(t)/x_e$$

$$\text{bzw } x_a=y, x_e=u$$

- Impulsantwort

= **Gewichtsfunktion**

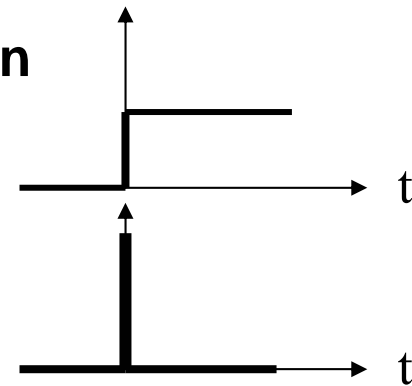
$g(t)$  als Antwort auf Dirac-Impuls  $\delta(t)$

$$g(t) = dh(t)/dt$$

- Faltungsintegral

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau$$

3. Zustandsraumdarstellung



# Faltungsintegral

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

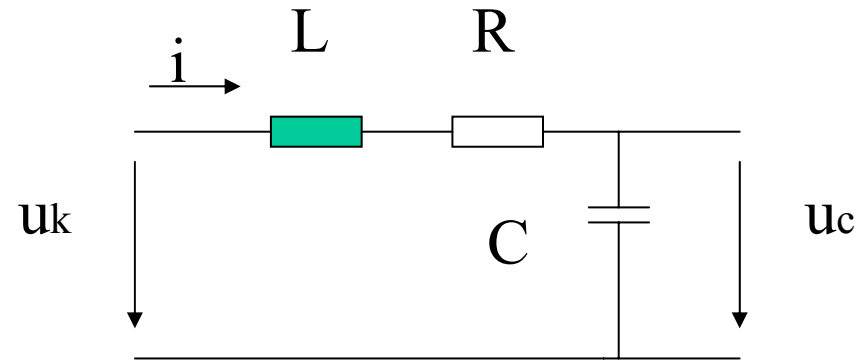
Kennt man die Gewichtsfunktion  $g(t)$ , so lässt sich zu jedem Eingangssignal  $u(t)$  das Ausgangssignal  $y(t)$  berechnen.

Gewichtsfunktion  $g(t)$  und Übergangsfunktion  $h(t)$  haben eine große Bedeutung für die Beschreibung linearer Systeme.

Sie enthalten die gesamte Information über deren dynamisches Verhalten.

$$g(t) = d h(t) / dt$$

### 3. Zustandsraumdarstellung (State Space)



Dynamisches Verhalten ist vollständig bestimmt durch

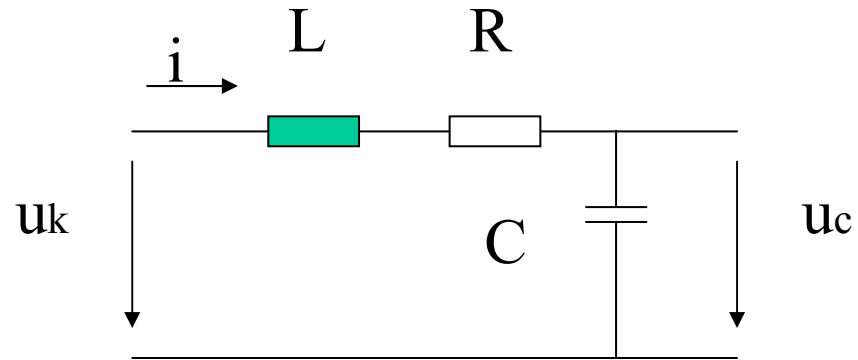
- Anfangswerte  $u_c(t_0)$ ,  $i(t_0)$
- Eingangsgröße  $u_k(t)$  für  $t \geq t_0$



Zustandsgrößen  $i(t)$  und  $u_c(t)$

charakterisieren „Zustand“ des Systems

# Zustandsraumdarstellung



$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u_k$$

$$C \frac{du_c}{dt} = i$$

$$\Rightarrow LC u_c'' + RC u_c' + u_c = u_k$$

$$\begin{bmatrix} i' \\ u_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Linearkombination

Die Zustandsgrößen charakterisieren den „Zustand“ des Systems

Ausgangsgrößen  $y$  als Linearkombination  
der Zustandsgrößen  $x$  und der Eingangsgröße  $u$

Vektordifferentialgleichung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \qquad \text{LDGLS}$$

Algebraische Gleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{d}u \qquad \text{AlgGL}$$

# Lösungsmethoden für Differentialgleichungen

## 1. Direkt für spezielle Typen

Beispiel:  $y'(x) = y(x)$     *Lösung* :  $y(x) = ce^x$

## 2. Mittels Transformation in einen Bildraum

Beispiel: Laplace, Fourier

## 3. Numerische Näherung

Beispiel: Euler Verfahren

## B. Beschreibung linearer kontinuierlicher Systeme im Frequenzbereich

Umkehrbar eindeutige Transformationen von Originalfunktion  $f(t)$  in Bildfunktion  $F(s)$  (Frequenzfunktion)

mit  $s = \sigma + j\omega$  = komplexe Variable,  $\omega$  = Frequenz

- Laplace-Transformation und ihr Umkehrintegral

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L} \{f(t)\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

## Lösung im Bildraum (Beispiel)

$$\overset{**}{f}(t) + 3 \overset{*}{f}(t) + 2 \overset{*}{f}(t) = e^{-t} \text{ mit } f(0) = \overset{*}{f}(0) = 0$$

1. Differentialgleichung
2. Transformation
3. Algebraische Gleichung
4. Lösung im Bildbereich
5. Rück Transformation
6. Lösung im Originalbereich

# Rechnen mit komplexen Zahlen

$$i^2 = -1$$

$$a = \alpha + i\beta, \quad \text{konjugiert komplex} \quad \overline{a} = \alpha - i\beta$$

$$a * \overline{a} = \alpha^2 + \beta^2 \quad |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$a^n = \left[ |a| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^n = |a|^n e^{in\varphi}$$

# Laplace-Transformationen einfacher Funktionen

$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$

## Lösungsschritte 1-3

$$1. \quad \overset{**}{f}(t) + 3 \overset{*}{f}(t) + 2 \overset{*}{f}(t) = e^{-t} \quad \text{mit} \quad f(0) = \overset{*}{f}(0) = 0$$

$$2. \quad \int_0^{\infty} \overset{**}{f} e^{-st} dt = F(s) \qquad \int_0^{\infty} \overset{*}{f} e^{-st} dt = \overset{*}{f} e^{-st} + sF(s)$$

$$\int_0^{\infty} \overset{**}{f} e^{-st} dt = \overset{*}{f} e^{-st} + s \int_0^{\infty} \overset{*}{f} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+s)} dt = \frac{1}{s+1}$$

$$3. \quad \rightarrow \quad s^2 F + 3sF + 2F = \frac{1}{s+1}$$

## Lösungsschritt 4

$$s^2 F + 3sF + 2F = \frac{1}{s+1}$$

4. 
$$F(s) = \frac{1}{s+1} * \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$



## Lösungsschritte 5-6

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

5. Rücktransformation mit Hilfe von Korrespondenztabelle

6.  $f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$

Lage der Pole  $s_1, s_2, s_3$  ist für den Verlauf von  $f(t)$  wichtig

Wenn alle Pole negativen Realteil haben,  
klingt  $f(t)$  im Unendlichen ab.

# Fouriertransformation

Umkehrbar eindeutige Transformationen von Originalfunktion  $f(t)$   
in Bildfunktion  $F(j\omega)$  (Spektral- oder Frequenzfunktion)

Für Zeitfunktionen im gesamten  $t$ -Bereich

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F} \{f(t)\}$$

Mit der Inversen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

# Übertragungsfunktion G(s)

DGL System

$$\sum_i a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} X_a(t) = \sum_j b_j(t) \frac{d^j}{dt^j} X_e(t)$$

Laplace Transformation mit Anfangsbedingungen Null, ergibt

$$\frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Zähler und Nennerpolynome haben Nullstellen, die in faktorisierter Form deutlich werden.

Die Nenner-Nullstellen ergeben die für Stabilitätsbetrachtungen wichtigen

**Pole der Übertragungsfunktion**

# Übertragungsfunktion

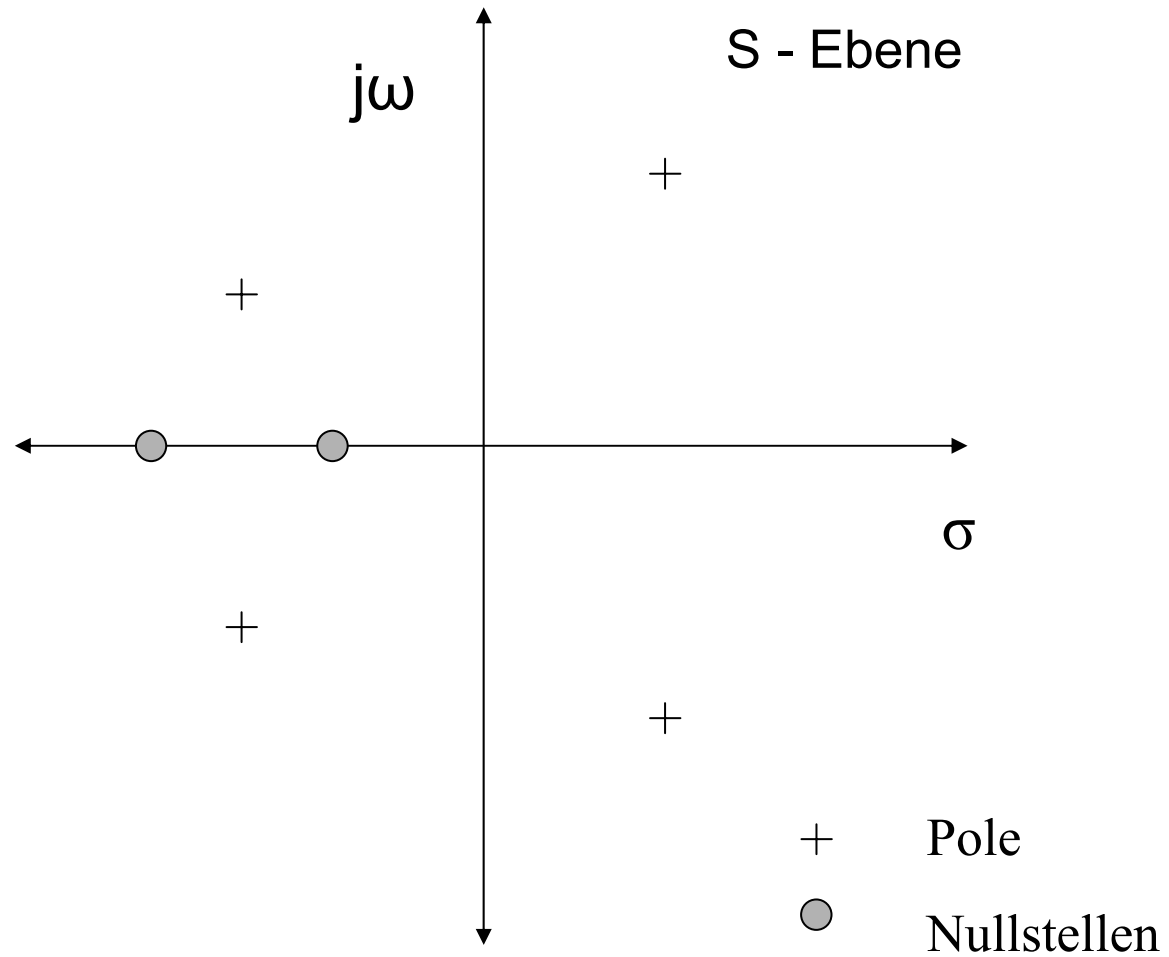
$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = k_0 \frac{(s-s_{n1})(s-s_{n2})(s-s_{n3})\dots}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})(s-s_{p3})\dots}$$

mit

**Nullstellen**  $s_{ni}$  und **Polstellen**  $s_{pj}$

Ein lineares zeitinvariantes System ohne Totzeit  
ist durch **Pole, Nullstellen und  $k_0$**  vollständig  
beschrieben

# Pole und Nullstellen



# Charakteristische Gleichung

Für das ungestörte System  $X_e(t) = 0$  gilt

$$\sum_i a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} X_a(t) = 0$$

Mit dem Lösungsansatz

$$x_a(t) = e^{st}$$

Folgt die Charakteristische  
Gleichung

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0$$

Das entspricht  $N(s) = 0$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung  
Sind Pole der Übertragungsfunktion !!

# Rechnen mit Übertragungsfunktionen

Reihenschaltung

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

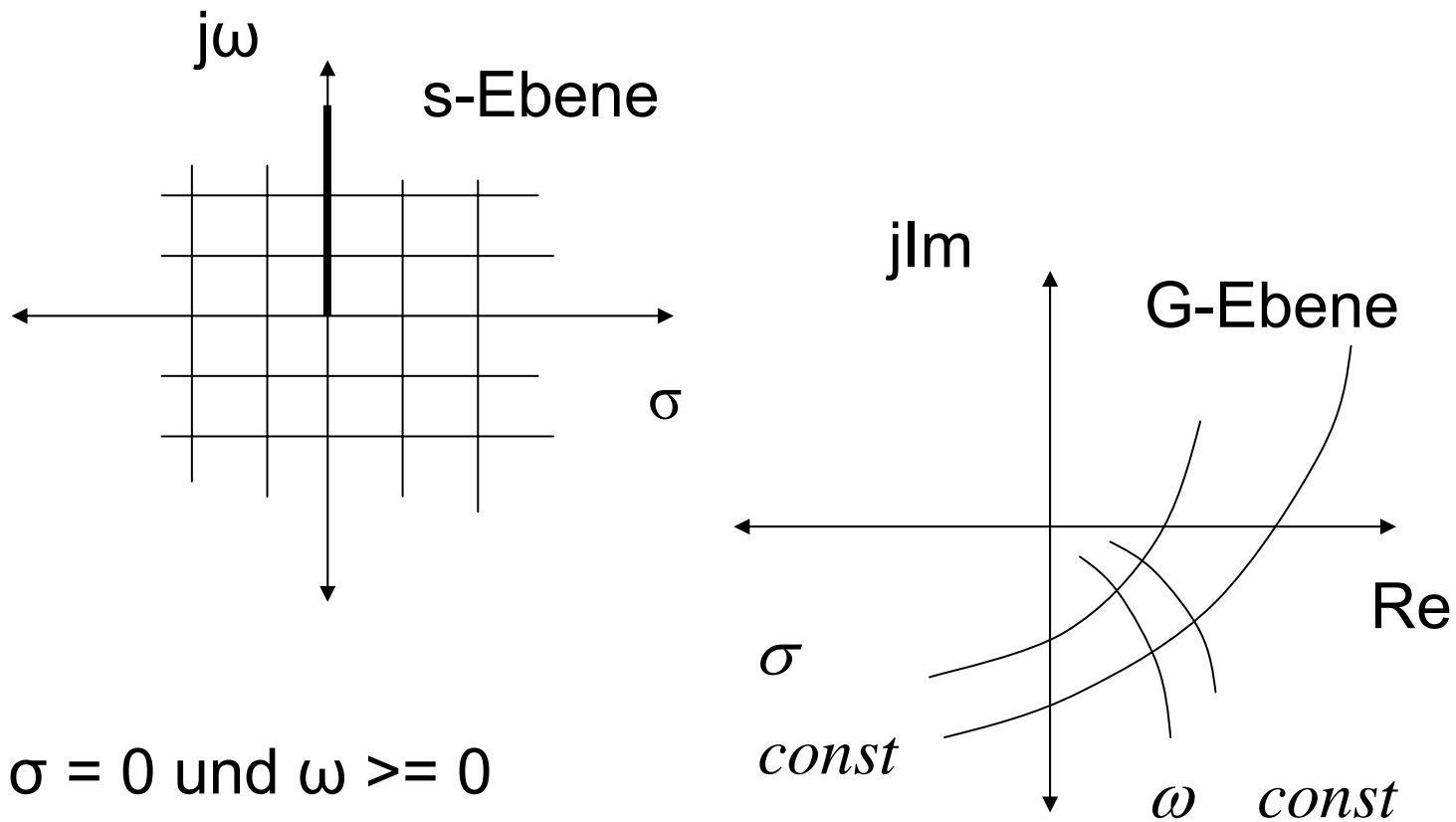
Parallelschaltung

$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)] U(s)$$

Kreisschaltung (Rückkopplung)

$$Y(s) = [U(s) - G_2(s)Y(s)] G_1(s)$$

# Lokal konforme Abbildung der s- auf die G- Ebene



Für  $\sigma = 0$  und  $\omega \geq 0$

=> Ortskurve des Frequenzganges  $G(j\omega)$



# Physikalische Interpretation

$$G(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega) = A(\omega) e^{**}(j\varphi(\omega))$$

$A$  = Amplitudengang,  $\varphi$  = Phasengang

Wird System sinusförmig erregt  $X_e(t) = X_{e0} * \sin(\omega t)$

dann reagiert ein lin. kont. System mit

$$X_a(t) = X_{a0} * \sin(\omega t + \varphi)$$

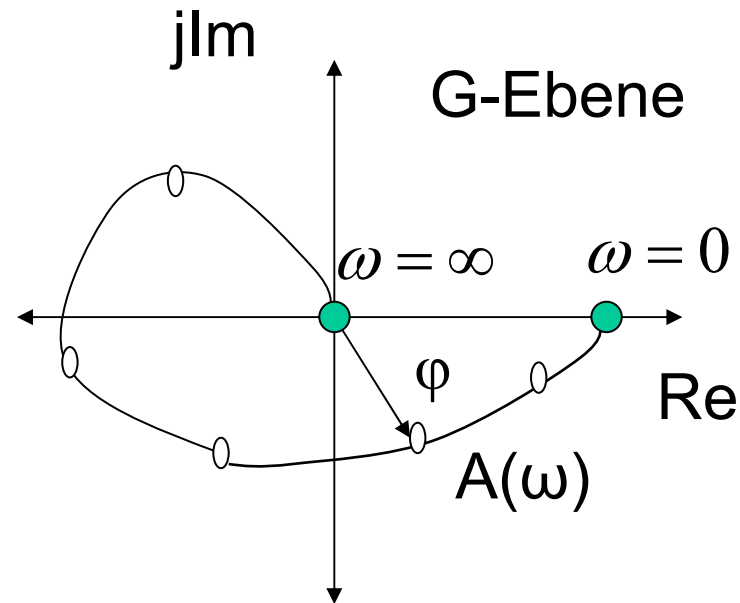
Führt man Messungen für verschiedene  $\omega$  durch, so

erhält man

$$\text{Amplitudengang } A(\omega) = X_{a0}(\omega)/X_{e0}$$

$$\text{Phasengang } \varphi(\omega) = \arctan I(\omega)/R(\omega)$$

# Ortskurve des Frequenzganges – Nyquist-Ortskurve



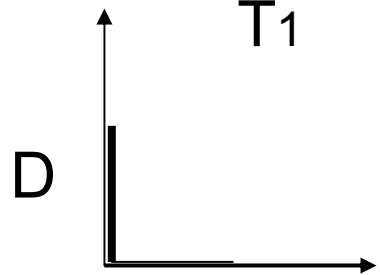
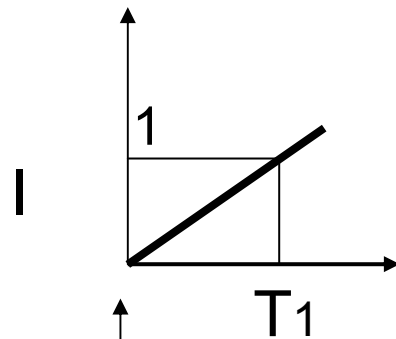
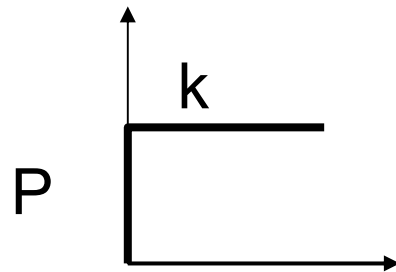
$$G(j\omega) = R(\omega) + i I(\omega) = A(\omega) e^{**}(j\varphi(\omega))$$

A = Amplitudengang,  $\varphi$  = Phasengang

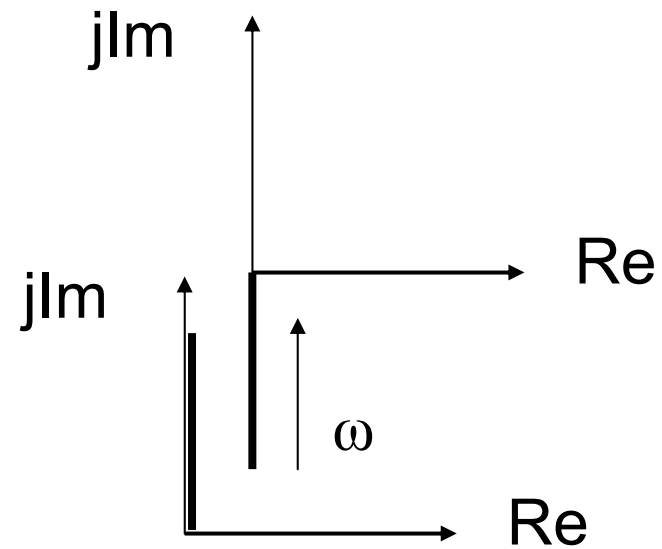
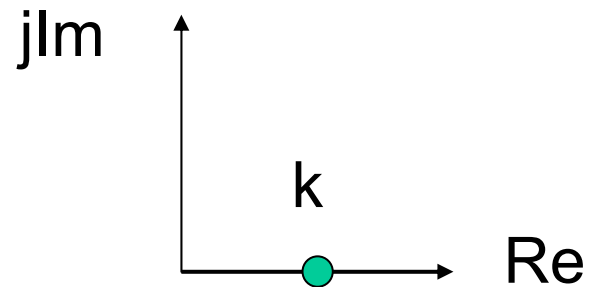
Leicht graphisch konstruierbar aus Messwerten und  
seriell/parallelen Übertragungsgliedern

# Verhalten der wichtigsten Übertragungsglieder

$h(t)$  Übergangsfunktion



Ortskurve



# Bode Diagramm

$$A(\omega)$$

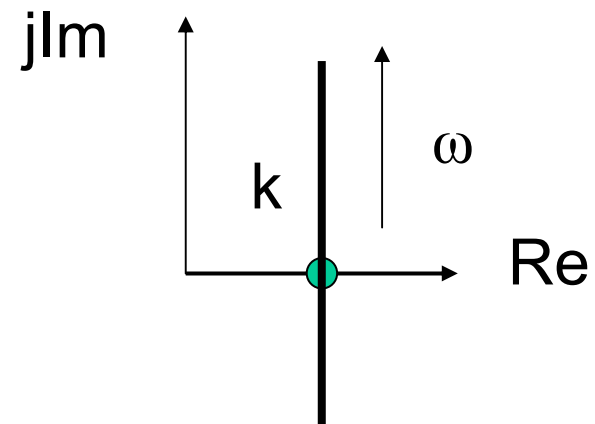
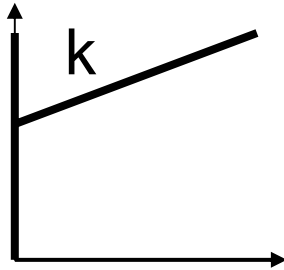
$$\varphi(\omega)$$

# Verhalten der wichtigsten Übertragungsglieder

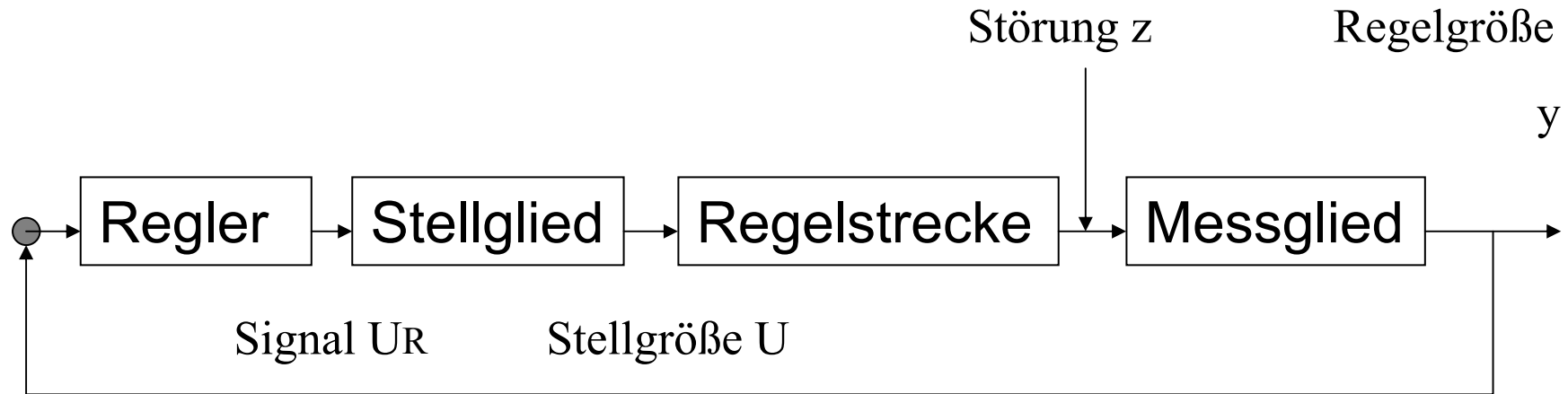
$h(t)$  Übergangsfunktion

Ortskurve

PID



# Verhalten von Regelkreisen



Übertragungsfunktionen

$G_R(s)$  für Regler

$G_S(s)$  für Stellglied

$G_Z(s)$  für Störverhalten (Regestrecke)

$$Y(s) = G_Z Z(s)/(1+G_R G_S) + G_R G_S W(s)/(1+G_R G_S)$$

# Stabilität von Regelkreisen

Asymptotisch stabil,

wenn Gewichtsfunktion (Impulsantwort) asymptotisch abklingt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Ist erfüllt,

wenn sämtliche Pole von  $G(s)$  negativen Realteil haben

Oft nicht genau bekannt, dann verschiedene

Stabilitätskriterien: Hurwitz, Routh, Nyquist