

# Mathematik 2 für Informatiker



## Einführung in die Graphentheorie

### Teil 1

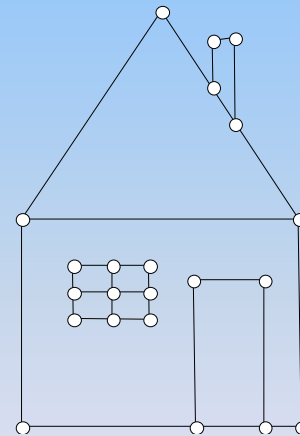
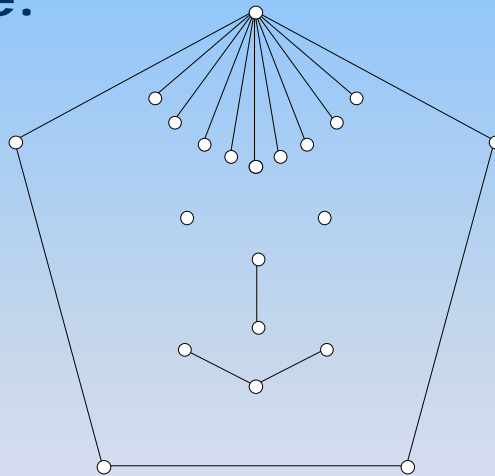
17.04.2007

M. B. Wischnewsky,

# Grundlagen

- **Definition.** Ein **Graph** besteht aus **Ecken** und **Kanten**; dabei verbindet jede Kante genau zwei Ecken; je zwei Ecken können durch keine, eine oder mehr als eine Kante verbunden sein.

- **Beispiele:**



# Anwendungen

---

● **Städteverbindungen:** Ecken = Städte, Kanten = Straßen.

Typische (und schwere) Frage: Wie kann man eine Rundreise kürzester Länge finden? (“**Travelling Salesman Problem**”).

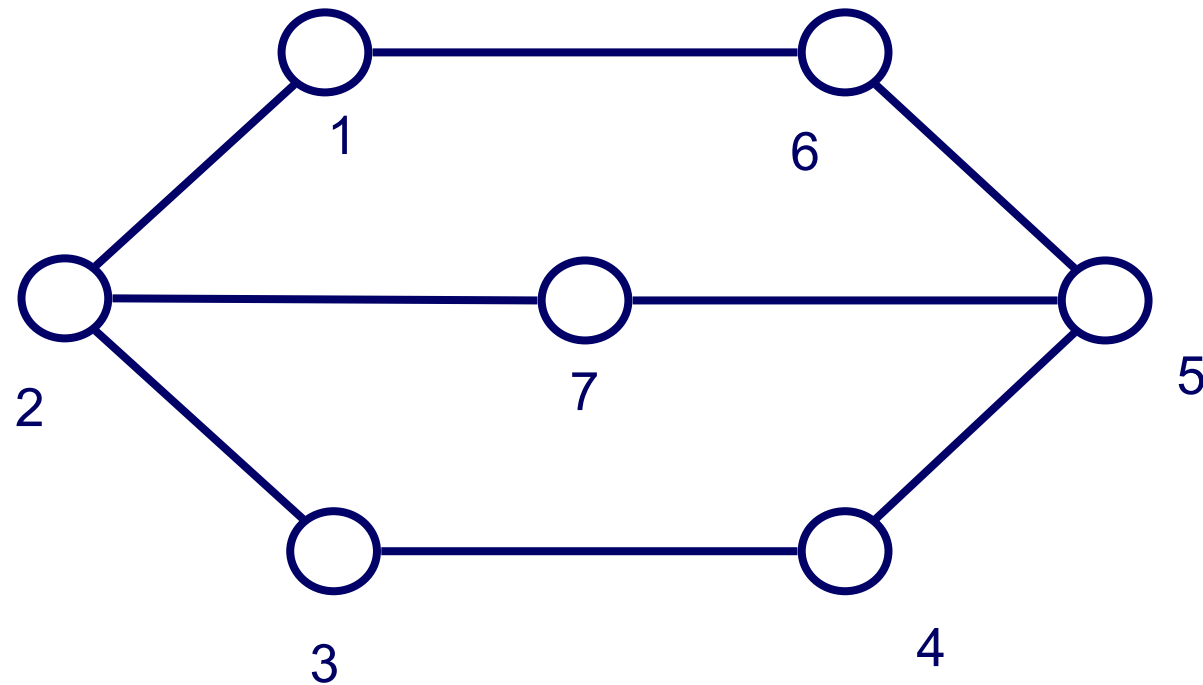
● **Chemische Moleküle:** Ecken = Atome, Kanten = Verbindungen.

Wichtige Frage (die zur Entwicklung der Graphentheorie entscheidend beigetragen hat): Gegeben eine Summenformel (z.B.  $C_nH_{2n+1}OH$ ), wie viele verschiedene Strukturformeln gibt es dazu?

● **Soziogramme:** Ecken = Personen einer Gruppe, Kanten = Beziehungen zwischen den Menschen (z.B. „bekannt sein mit“).

# Ungerichteter Graph

**Beispiel:**



# Ungerichteter Graph

## Definition:

$G = (E, K)$  heißt **ungerichteter Graph** mit Eckenmenge  $E$  und Kantenmenge  $K$ ,

falls jedes  $k \in K$  eine zweielementige

Teilmenge von  $E$  ist.

$E$  ist endlich.

## Anmerkungen:

Falls  $\{v, w\} \in K$ , sind  $v$  und  $w$  durch eine ungerichtete Kante miteinander verbunden.

Beachte:  $\{v, w\}$  und  $\{w, v\}$  beschreiben dieselbe Menge, also auch Kante.

Kanten von  $v$  zu sich selbst sind damit nicht zu erhalten!

Nimmt man Kanten von  $v$  zu sich selbst hinzu, so muss man in der Definition auch einelementige Mengen zulassen.

# Ungerichteter Graph

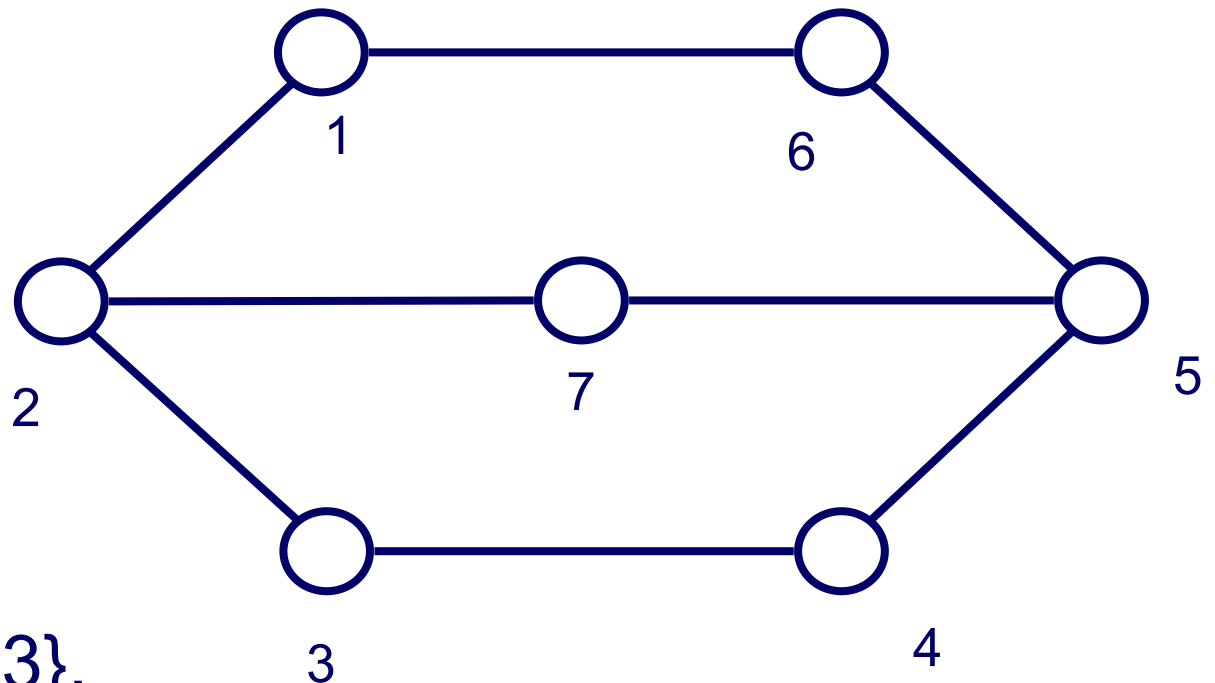
**Beispiel:**

$$G_1 = (E_1, K_1)$$

mit:

$$E_1 = \{1, \dots, 7\}$$

$$K_1 = \{\{1,2\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \\ \{2,7\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{5,7\}\}$$



# Ungerichteter Graph

## Definitionen:

Sei  $G = (E, K)$  ein ungerichteter Graph.

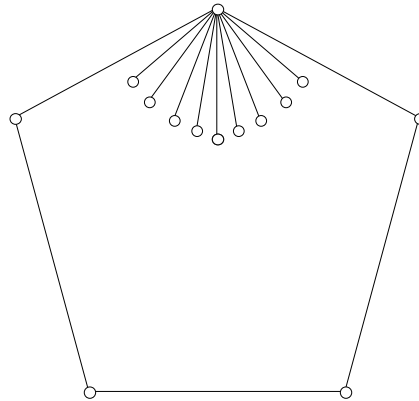
1)  $(v_0, \dots, v_n)$  heißt **Pfad von  $v_0$  nach  $v_n$**  für  $v_i \in E$ ,  
falls  $\{v_{i-1}, v_i\} \in K$  für  $1 \leq i \leq n$ .

2) Der Graph  $G$  heißt **zusammenhängend**,  
falls es zu zwei verschiedenen Ecken  $v$  und  $w$  stets  
einen Pfad von  $v$  nach  $w$  gibt.

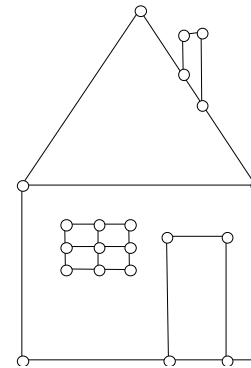
# Zusammenhängende Graphen

**Definition.** Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn man von jeder Ecke zu jeder anderen über eine Folge von Kanten kommen kann.  
Das bedeutet: Ein Graph ist zusammenhängend, wenn er nicht in mehrere Teile “zerfällt”.

Beispiel:



zusammenhängend



unzusammenhängend



# Ungerichteter Graph

## Beispiel:

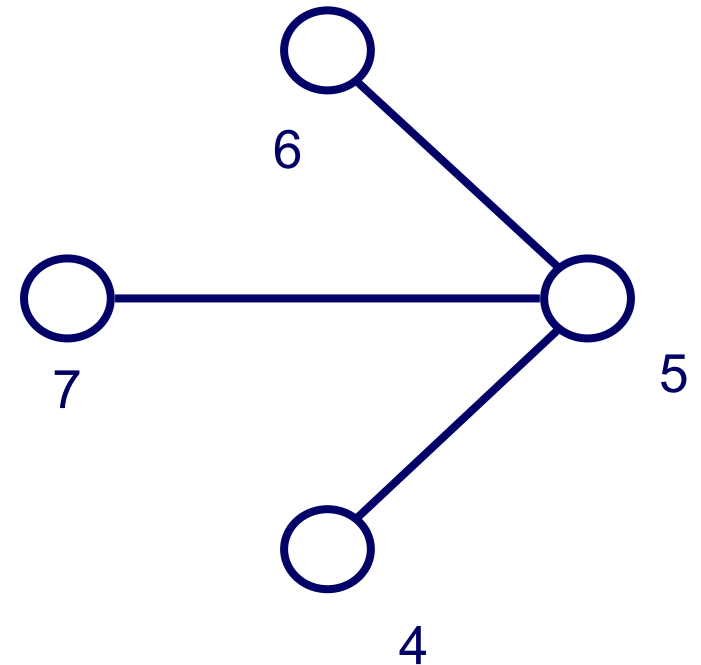
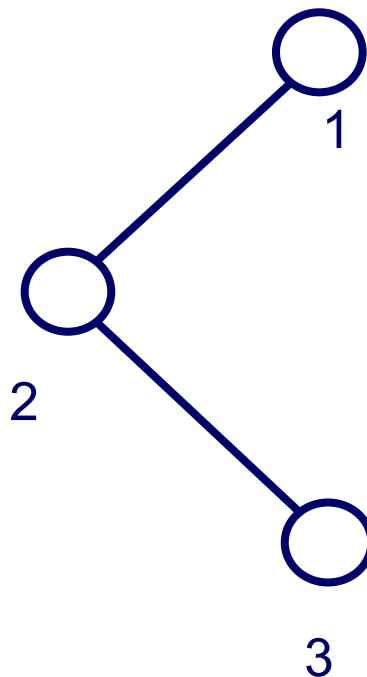
$$G_2 = (E_2, K_2)$$

mit:

$$E_2 = \{1, \dots, 7\}$$

$$K_2 = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \\ \{5,6\}, \{5,7\}\}$$

- Pfad:  $\{1,2,3\}$
- Nicht zusammenhängend



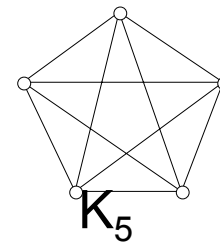
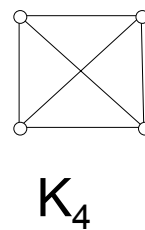
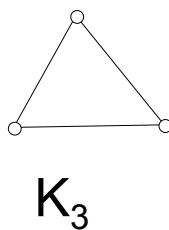
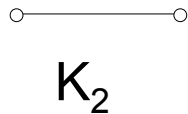
# Vollständige Graphen

**Definition.** Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jede Ecke mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

Bei einem vollständigen Graphen sind also je zwei Ecken verbunden, aber nur durch eine Kante.

Der vollständige Graph mit  $n$  Ecken wird mit  $K_n$  bezeichnet.

Beispiele:



# Grad einer Ecke

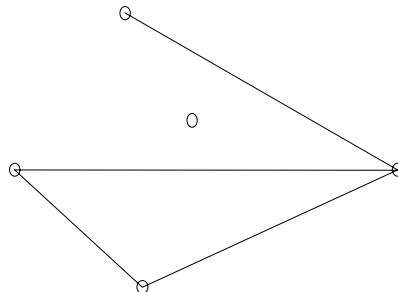
**Definition.** Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Beispiele:

- a) Der Grad einer Ecke ist gleich 0, falls von ihr keine Kante ausgeht.
- b) In dem vollständigen Graphen  $K_n$  hat jede Ecke den Grad  $n-1$ , da sie mit jeder der  $n-1$  anderen Ecken durch genau eine Kante verbunden ist.

Im allgemeinen haben die Ecken eines Graphen verschiedene Grade.

Beispiel:



# Repräsentation von Graphen

## 1) Mengentheoretisch wie in Definition

## 2) Adjazenzmatrix

Liegt zwischen den Ecken  $i$  und  $j$  eine Kante, so setzt man

$a(i, j) = 1$ , sonst setzt man  $a(i, j) = 0$ .

– Aufwand:

- » Nur für "Hälfte" oberhalb der Diagonale nötig:
- » Benötige für  $n$  Knoten  $n*(n-1)/2$  Speicherplätze für die Kanten.
- » Meist jedoch: sind Graphen eher spärlich besetzt:

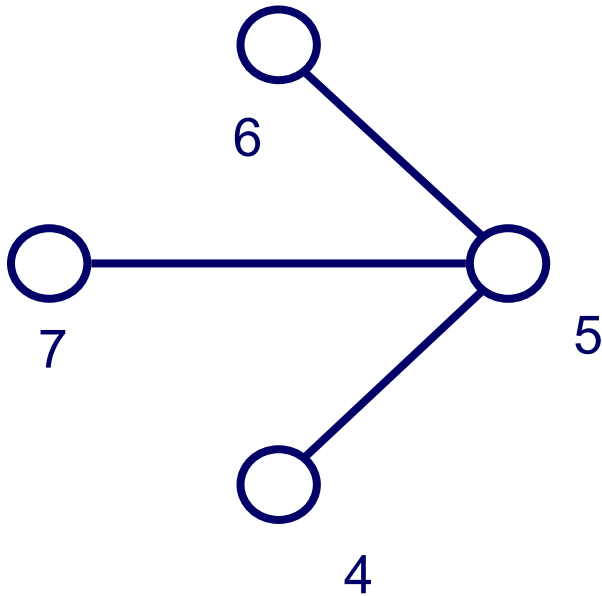
## 3) Adjazenzliste

– Speichere alle Nachbarn eines Knotens in einer Liste.

# Ungerichteter Graph

**Beispiel:**  $G_3 = (E_3, K_3)$  mit:  $E_3 = \{4, 5, 6, 7\}$

Mengentheoretisch:  $K_3 = \{\{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}\}$



Adjazenz-Matrix:

	4	5	6	7
4		1	0	0
5			1	1
6				0
7				

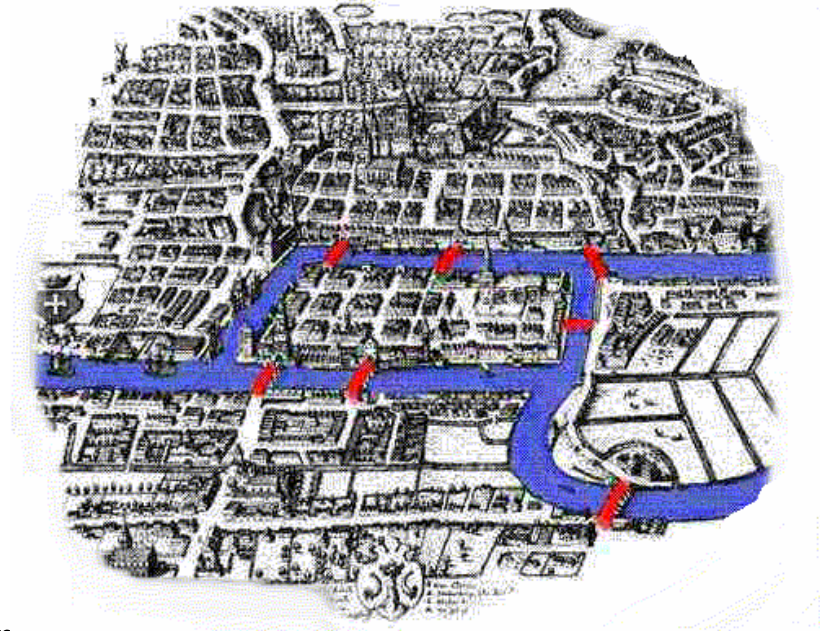
Adjazenz-Liste:

4	{5}
5	{4,6,7}
6	{5}
7	{5}

# Das Königsberger Brückenproblem

Dem Mathematiker **Leonhard Euler** wurde 1736 folgendes Problem gestellt, das ihn zur Entwicklung der Graphentheorie geführt hat.

Durch Königsberg fließt die Pregel, die sich teilt und zwei Inseln umfließt. Diese sind untereinander und mit den Ufern wie abgebildet durch Brücken verbunden.



**Frage:** Gibt es einen Spaziergang, der jede Brücke genau einmal überquert und bei dem man zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

# Übersetzung der Karte in einen Graphen

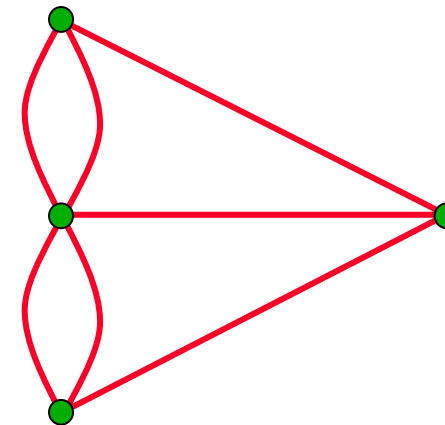
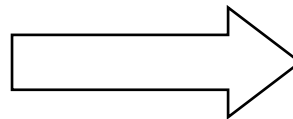
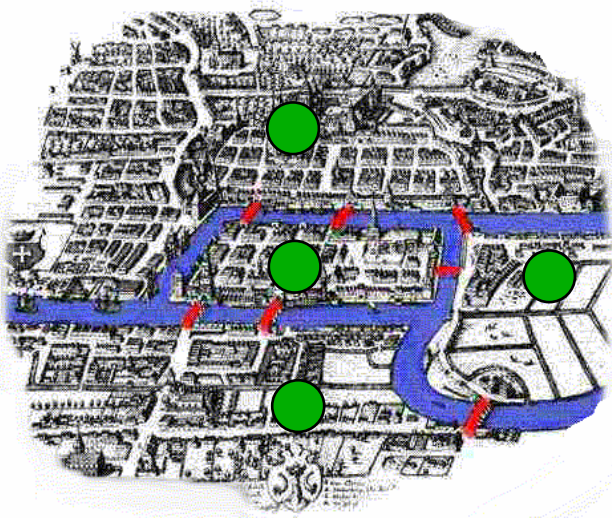
Jedem Landteil wird eine Ecke zugeordnet:



Jede Brücke wird mit einer Kante identifiziert:



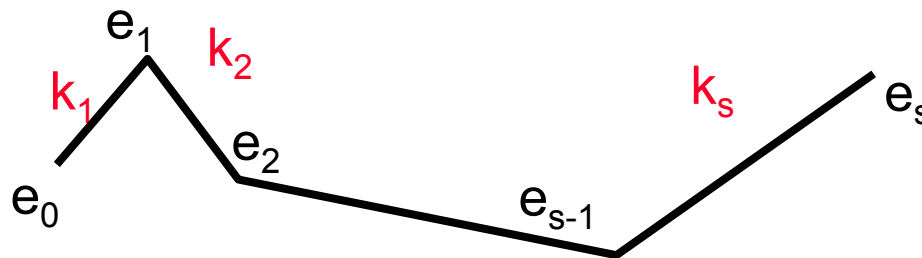
Aus der Landkarte erhält man so den folgenden Graphen:



# Übersetzung des Problems (I): Eulersche Kreise

**Definition.** Sei  $G$  ein Graph.

1) Eine Folge  $k_1, k_2, \dots, k_s$  von Kanten von  $G$  heißt **Kantenzug**, falls es Ecken  $e_0, e_1, \dots, e_s$  gibt, so dass die Kante  $k_1$  die Ecken  $e_0$  und  $e_1$  verbindet, die Kante  $k_2$  die Ecken  $e_1$  und  $e_2$  verbindet, ..., die Kante  $k_s$  die Ecken  $e_{s-1}$  und  $e_s$  verbindet.



2) Ein Kantenzug heißt ein **eulerscher Kreis** von  $G$ , wenn

- jede Kante von  $G$  genau einmal unter den  $k_1, k_2, \dots, k_s$  auftaucht
- und  $e_s = e_0$  ist.



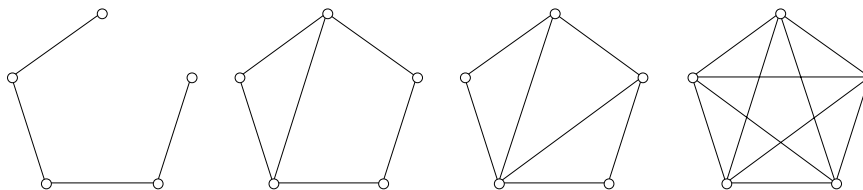
# Übersetzung des Problems (II): Eulersche Graphen

**Definition.** Ein **eulerscher Graph** ist ein Graph, der einen eulerschen Kreis enthält.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist eulersch, wenn man

1. seine Kanten in einem Zug zeichnen kann und
2. am Ende wieder am Ausgangspunkt anlangt.

**Beispiel:**  $K_5$  ist eulersch (Beweis folgt aus dem folgenden Satz von Euler):

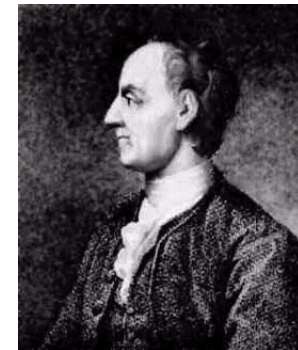


# Lösung des Königsberger Brückenproblems

Der gesuchte Spaziergang, der jede Brücke genau einmal überquert und zum Startpunkt zurückkehrt, entspricht einem eulerschen Kreis.

Die Frage lautet also: Ist der Graph des Königsberger Brückenproblems eulersch?

**Satz von Euler (1736):** Wenn ein Graph  $G$  eulersch ist, dann hat jede Ecke von  $G$  geraden Grad.



Damit gelang Euler die **Lösung des Königsberger Brückenproblems**:

Der Graph des Problems hat Ecken vom Grad 3, 3, 3, 5. Also ist er nicht eulersch. Ein solcher Spaziergang ist nicht möglich!

# Beweis des Satzes von Euler

**Beweis.** Wir betrachten eine beliebige Ecke  $e$  von  $G$ . Der eulersche Kreis durchquert die Ecke  $e$  einige Male, sagen wir  $k$  mal.

**Behauptung:** Der Grad der Ecke  $e$  ist gleich  $2k$ , also eine gerade Zahl.

**Denn:** Bei jedem Durchgang durch  $e$  verbraucht der eulersche Kreis 2 Kanten; in  $k$  Durchgängen werden also  $2k$  Kanten erfasst. Da keine Kante zweimal benutzt wird, ist der Grad von  $e$  also mindestens gleich  $2k$ . Der Grad kann aber auch nicht größer sein, da jede Kante (also auch jede Kante, die an  $e$  angrenzt) in dem eulerschen Kreis mindestens einmal vorkommt.

Damit ist der Grad von  $e$  gleich  $2k$ , also eine gerade Zahl.  $\square$

# Umkehrung des Satzes von Euler

Es gilt auch Umkehrung:

**Umkehrung des Satzes von Euler.** Wenn in einem zusammenhängenden Graphen  $G$  jede Ecke geraden Grad hat, dann ist  $G$  eulersch.  $\square$

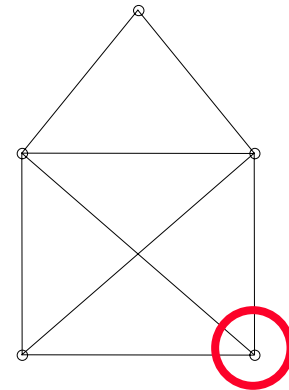
**Folgerung:** Jeder vollständige Graph  $K_n$  mit ungeradem  $n$  (also  $K_3$ ,  $K_5$ ,  $K_7$ , ...,  $K_{2005}$ , ...) ist eulersch.

**Beweis.** Jede Ecke von  $K_n$  hat den Grad  $n-1$ .  
Wenn  $n$  ungerade ist, ist  $n-1$  gerade.  $\square$

# Offene eulersche Linien

**Definition.** Eine **offene eulersche Linie** ist ein Kantenzug,  
- der jede Kante genau einmal durchquert,  
- und die Anfangsecke verschieden von der Endecke ist.

Also kann ein Graph genau dann “in einem Zug”  
gezeichnet werden, wenn er einen eulerschen  
Kreis oder eine offene eulersche Linie besitzt. **Beispiel:**



**Satz.** Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine offene eulersche Linie, wenn er genau **2 Ecken ungeraden Grades** besitzt.  
Wenn dies der Fall ist, so beginnt die offene eulersche Linie an der einen Ecke ungeraden Grades und endet an der anderen.

# Beweis der Hinrichtung

**Beweis.** Wir müssen zwei Richtungen zeigen.

→: Wenn  $G$  eine offene eulersche Linie hat, dann gibt es genau 2 Ecken mit ungeradem Grad.

Wir betrachten eine offene eulersche Linie, die von  $a$  nach  $e$  führt.

**Trick:** Wir denken uns eine *zusätzliche Kante*  $k^*$  zwischen  $a$  und  $e$ .

Dann wird aus der offenen eulerschen Linie eine geschlossene. Nach dem Satz von Euler hat dann also jede Ecke geraden Grad.

Nun vergessen wir  $k^*$  wieder. Jede Ecke verschieden von  $a$  und  $e$  hat dann immer noch geraden Grad, während sich der Grad von  $a$  und  $e$  jeweils um 1 erniedrigt hat, also jetzt ungerade ist. Also sind  $a$  und  $e$  die einzigen Ecken mit ungeradem Grad.

# Beweis der Rückrichtung

<-- Wenn  $G$  genau 2 Ecken mit ungeradem Grad hat, dann gibt es eine offene eulersche Linie.

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph, der genau zwei Ecken  $a$  und  $e$  ungeraden Grades besitzt.

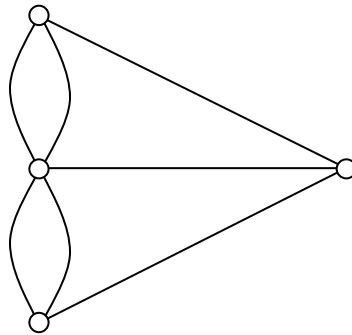
**Trick:** Wir denken uns eine *zusätzliche Kante*  $k^*$  zwischen  $a$  und  $e$ .

Diese hat den Effekt, dass jetzt jede Ecke geraden Grad hat. Nach der Umkehrung des Satzes von Euler hat der Graph mit der Kante  $k^*$  eine geschlossene eulersche Linie.

Wenn wir  $k^*$  wieder vergessen, wird aus der geschlossenen eulerschen Linie eine offene mit der Anfangsecke  $a$  und der Endecke  $e$ . Also hat  $G$  eine offene eulersche Linie.  $\square$

## Bsp.: Gibt es „offene Spaziergänge“ durch Königsberg?

Der Graph des Königsberger Brückenproblems hat vier Ecken ungeraden Grades.



Also enthält er auch keine offene Linie.

Es gibt also keinen Spaziergang durch Königsberg, der jede Brücke genau einmal überquert – selbst wenn der Startpunkt verschieden vom Endpunkt sein darf.



# Was ist das Chinese Postman Problem?

**Problem:** Finde durch ein gegebenes Straßennetz einen geschlossenen Weg, der jede Straße (mindestens) einmal enthält und am Ausgangsort endet.

**Lösung:** Bilde das Straßennetz als Graph ab und löse das Problem mit Hilfe von Euler.

**Praktische Relevanz:**

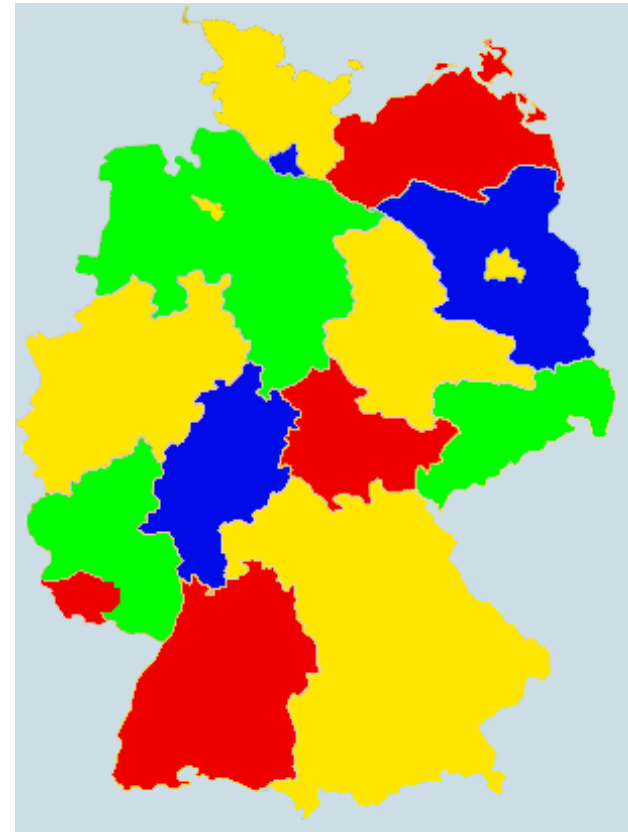
- Briefträger, der Post zustellt
- Durchführung der Müllabfuhr
- Durchführung der Straßenreinigung
- Ablesen von Strom- und Wasserzählern in Haushalten
- ...

# Färbungen

**Ursprung:** Mitte des 19. Jahrhunderts  
kam folgende **Frage** auf:

Wie viele Farben braucht man mindestens,  
um eine beliebige Landkarte so zu färben,  
dass je zwei benachbarte Länder verschie-  
dene Farben haben?

**Vierfarbenvermutung:**  
Vier Farben genügen!



# Vierfarbenvermutung – Beweisversuche

1852: Mathematikstudent F. Guthrie färbt die Karte von England und äußert zum ersten Mal die Vierfarbenvermutung.

1878: “On the colouring of maps” von A. Cayley.

1879: “On the geographical problem of the four colors” von A. B. Kempe: erster „Beweis“ des Vierfarbensatzes.

1890: P. J. Heawood entdeckt einen Fehler in Kempes Beweis. Heawood kann den Fünffarbensatz zeigen („5 Farben reichen auf jeden Fall“).

H. Heesch (1906-1995): Entwickelt von Kempes Methoden jahrzehntelang weiter und kommt zu dem Schluss, dass das Problem mit Hilfe eines Rechners lösbar sein müsste.

# Der Beweis des Vierfarbensatzes mit dem Computer

1976: K. Appel und W. Haken (University of Illinois at Urbana) bauen auf den Arbeiten von Heesch auf, und können das Problem mit Hilfe eines Computers lösen.

Der Satz ist endlich bewiesen!



Der Beweis hat viel Aufsehen erregt: Zum ersten Mal beim Beweis eines Satzes wurde der Computer essentiell eingesetzt.

Auch heute noch wünschen sich viele Mathematiker einen schönen, kurzen Beweis, den man z.B. in einer Vorlesung darstellen könnte.

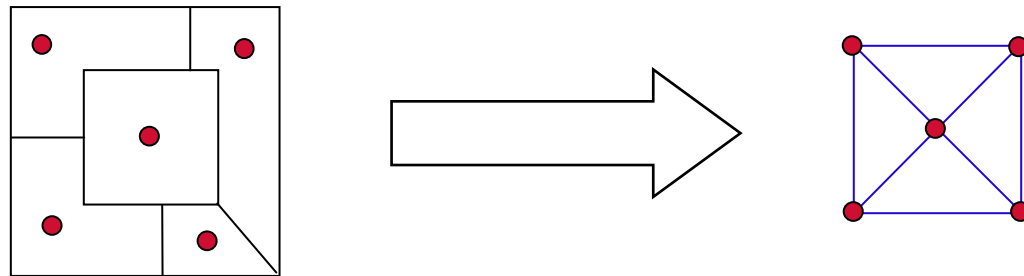
# Übersetzung der Landkarte in einen Graphen

Wir zeichnen in jedem Land einen Punkt (die “Hauptstadt”) aus; das sind die **Ecken** des Graphen.

Wir verbinden zwei Ecken durch eine **Kante**, wenn die entsprechenden Länder ein Stück Grenze gemeinsam haben.

Auf diese Weise erhält man einen planaren Graphen.

Beispiel:



# Die chromatische Zahl $\chi(G)$

**Definition.** Eine **Färbung** eines Graphen ist eine Zuordnung von “Farben” zu den Ecken, so dass keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken die gleiche Farbe haben.

**Definition.** Die **chromatische Zahl**  $\chi(G)$  eines Graphen  $G$  ist die kleinste natürliche Zahl, mit der  $G$  gefärbt werden kann.  
( $\chi$  ist der griech. Buchstabe “chi”, der Anfangsbuchstabe des Wortes “chroma” = Farbe.)

Beispiele:

- (a) Kreise gerader Länge:  $\chi = 2$ , Kreise ungerader Länge:  $\chi = 3$ .
- (b)  $\chi(K_n) = n$ .

# Übersetzung des Färbungsproblems in Graphentheorie

**Übersetzung des Problems:** Die Ecken des Graphen sollen so gefärbt werden, dass je zwei durch eine Kante verbundene Ecken verschiedene Farben haben. Wie viele Farben benötigt eine solche Färbung?

Die **Vierfarbenvermutung** lautet:

Wenn  $G$  ein planarer Graph ist, so ist  $\chi(G) \leq 4$ .

Folgendes **Beispiel** zeigt, dass nur 3 Farben nicht genügen:

