

Mathematik 2 für Informatiker



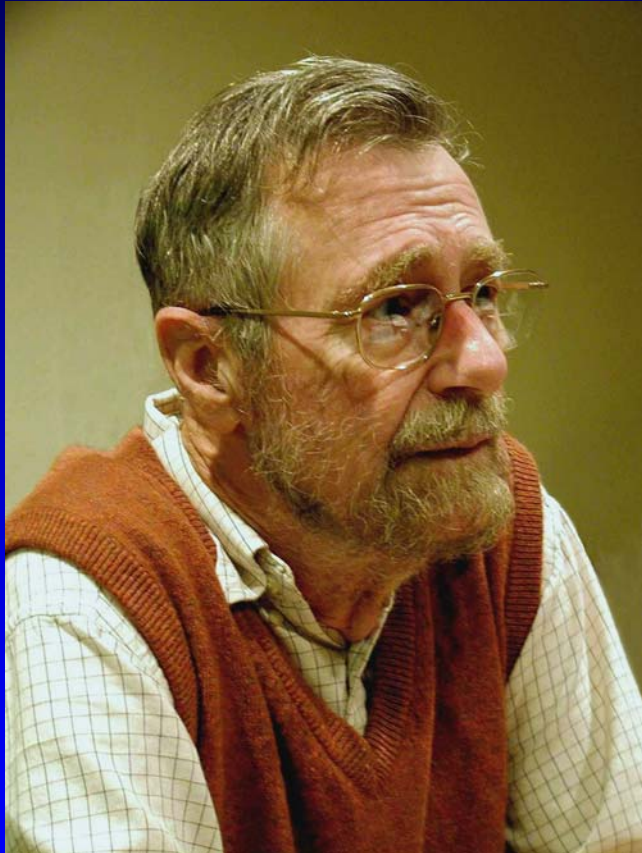
Einführung in die Graphentheorie

Teil 3

24.04.2007

M. B. Wischnewsky,

Edsger Wybe Dijkstra



2002

- bekannter Informatiker aus den Niederlanden
- * 11. Mai 1930 in Rotterdam
- studierte theoretische Physik und Mathematik an der Universität Leiden
- arbeitete 1952-1962 am *Mathematisch Centrum* in Amsterdam
- wurde dann Professor für Mathematik an der TU Eindhoven
- wechselte 1984 zur Universität von Austin, Texas
- Wurde 1999 emeritiert
- † 6. August 2002 in Nuegen

Das Paper

„A Note on Two Problems in
Connexion with Graphs“
by E. W. Dijkstra, June 1959

Das Paper

• Dijkstras Definition:

- n Punkte
- jeweils 2 Punkte können mit Kanten verbunden sein
- Kanten haben Gewicht
- Zwischen 2 beliebigen Knoten gibt es mindestens einen Pfad

• Allgemeine Definition:

- Graph $G(V, E)$ mit V als endlicher nicht leere Menge von Knoten und E als Menge der Kanten mit

$$E \subseteq V \times V$$

- G zusammenhängend
- Gewichtsfunktion f mit

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Definition

Spannender Baum:

- *Der Spannende Baum eines ungerichteten Graphen $G(V,E)$ ist ein kreisfreier, zusammenhängender Untergraph $G'(V,E')$*

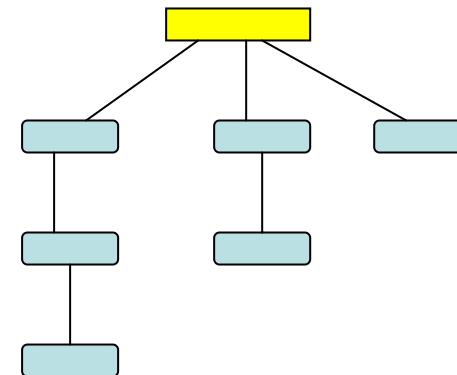
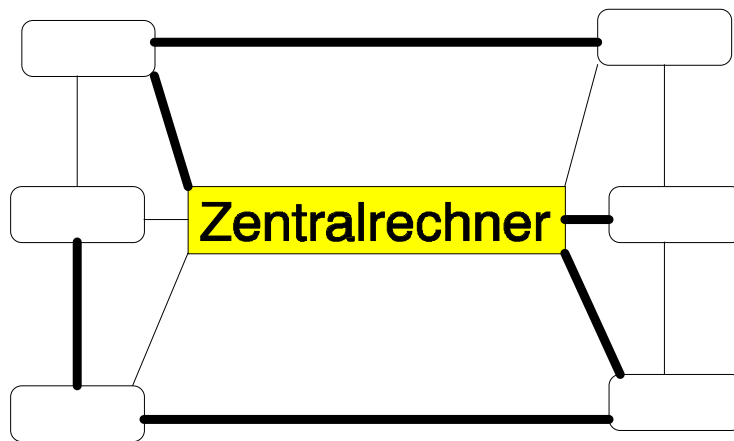
Minimal Spannender Baum:

- *Der minimal spannende Baum eines Graphen $G(V,E)$ ist derjenige spannende Baum G' bei dem die Summe der Kantengewichte minimal ist*

Aufspannender Baum: Gerüst

Gegeben sei ein Graph $G = (E, K)$.

Ein Baum $B = (E, K')$ mit $K' \subseteq K$ heißt aufspannender Baum von G , falls **alle** Knoten in B paarweise durch Pfade miteinander verbunden sind.



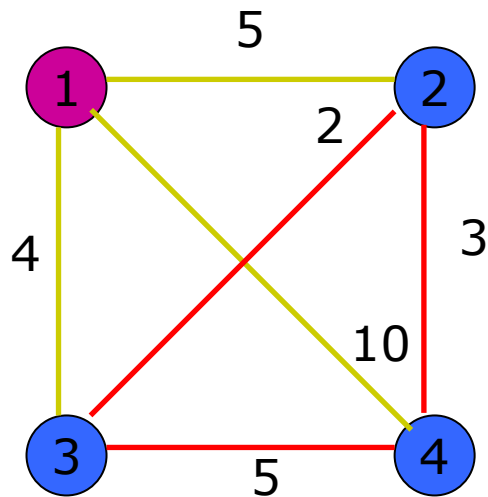
Minimal Spannender Baum (MST)

- Kanten werden in 3 Mengen aufgeteilt
 - I. Kanten die definitiv im MST enthalten sind
 - II. Kanten aus denen als nächstes eine in Menge I genommen wird
 - III. Alle übrigen Kanten
- Knoten werden in 2 Mengen aufgeteilt
 - a. Alle Knoten die zu Kanten aus Menge I gehören
 - b. Alle übrigen Knoten

Minimal Spannender Baum

- Ausgangspunkt : zufälliger Knoten in Menge a und alle Kanten die zu ihm führen in Menge II, alle anderen Knoten in b und alle anderen Kanten in Menge III
- Die folgenden 2 Schritte wiederholen bis Mengen II und b leer sind
 1. Kürzeste Kante von Menge II nach in Menge I verschieben und zweiten Knoten der Kante von Menge b nach Menge a verschieben
 2. Alle Kanten die vom eben nach Menge a verschobenem Knoten zu einem Knoten in Menge b gehen durchgehen und mit entsprechenden Kanten aus II vergleichen. Ist das Gewicht der Kante geringer als der aus II wird diese ersetzt, andernfalls nicht
- In Menge I stehen dann die Kanten des MST

Start



$$I = \{\}$$

$$II = \{(1,3), (1,2), (1,4)\}$$

$$III = \{(3,2); (3,4); (2,4)\}$$

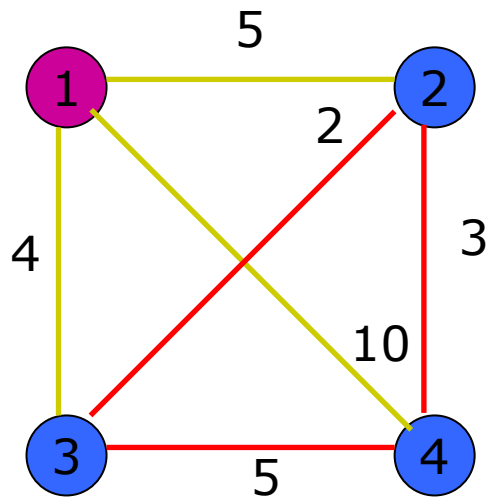
$$a = \{1\}$$

$$b = \{2,3,4\}$$

Minimal Spannender Baum

- Ausgangspunkt : zufälliger Knoten in Menge a und alle Kanten die zu ihm führen in Menge II, alle anderen Knoten in b und alle anderen Kanten in Menge III
- Die folgenden 2 Schritte wiederholen bis Mengen II und b leer sind
 1. Kürzeste Kante von Menge II nach in Menge I verschieben und zweiten Knoten der Kante von Menge b nach Menge a verschieben
 2. Alle Kanten die vom eben nach Menge a verschobenem Knoten zu einem Knoten in Menge b gehen durchgehen und mit entsprechenden Kanten aus II vergleichen. Ist das Gewicht der Kante geringer als der aus II wird diese ersetzt, andernfalls nicht
- In Menge I stehen dann die Kanten des MST

Start



$$I = \{\}$$

$$II = \{(1,3), (1,2), (1,4)\}$$

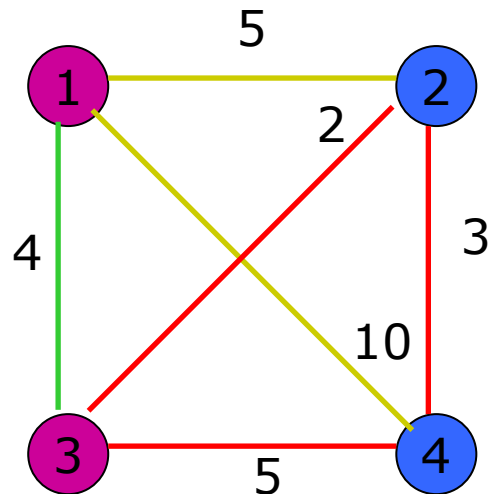
$$III = \{(3,2); (3,4); (2,4)\}$$

$$a = \{1\}$$

$$b = \{2,3,4\}$$

Iteration I

Start 1



- (1,3) ist kürzeste Kante
⇒ verschiebe sie nach I
und Knoten 3 nach a

$$I = \{(1,3)\}$$

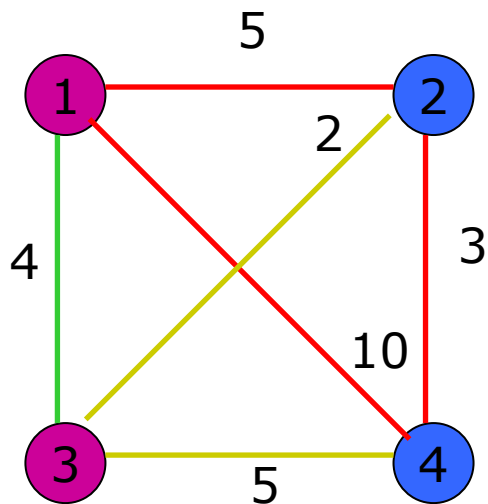
$$II = \{(1,2), (1,4)\}$$

$$III = \{(3,2); (3,4); (2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Iteration I



- 2 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,2) wird abgelehnt und (2,3)
übernommen
- 4 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,4) wird abgelehnt und (3,4)
übernommen

$$I = \{(1,3)\}$$

$$II = \{(3,2);(3,4); \}$$

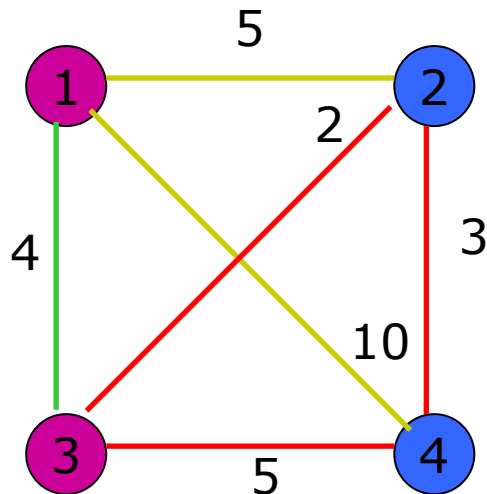
$$III = \{(2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Iteration I

Start 1



- (1,3) ist kürzeste Kante
⇒ verschiebe sie nach I
und Knoten 3 nach a

$$I = \{(1,3)\}$$

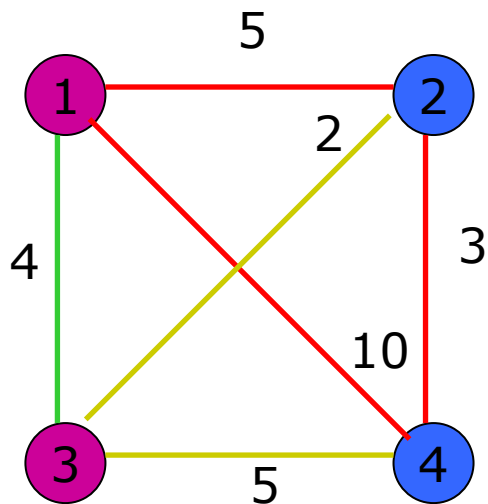
$$II = \{(1,2), (1,4)\}$$

$$III = \{(3,2); (3,4); (2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Iteration I



- 2 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,2) wird abgelehnt und (2,3)
übernommen
- 4 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,4) wird abgelehnt und (3,4)
übernommen

$$I = \{(1,3)\}$$

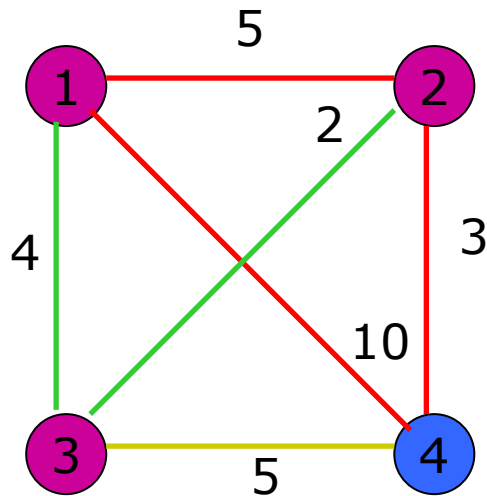
$$II = \{(3,2);(3,4); \}$$

$$III = \{(2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Iteration II



- (2,3) ist kürzeste Kante
⇒ verschiebe sie nach I
und Knoten 2 nach a

$$I = \{(1,3), (3,2)\}$$

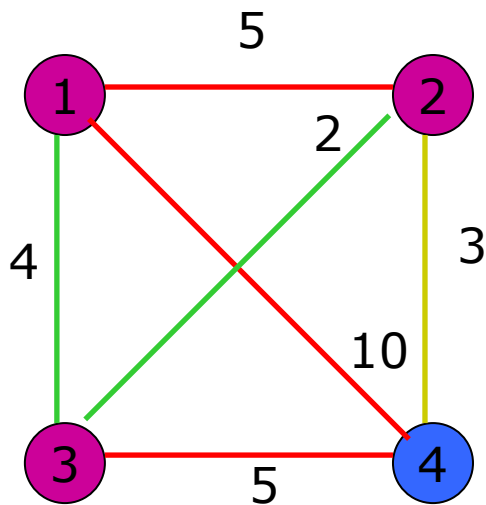
$$II = \{(3,4)\}$$

$$III = \{(2,4)\}$$

$$a = \{1,3,2\}$$

$$b = \{4\}$$

Iteration II



- 4 ist von 2 aus kürzer zu erreichen
⇒ lehne (3,4) ab und übernehme (2,4)

$$I = \{(1,3), (3,2)\}$$

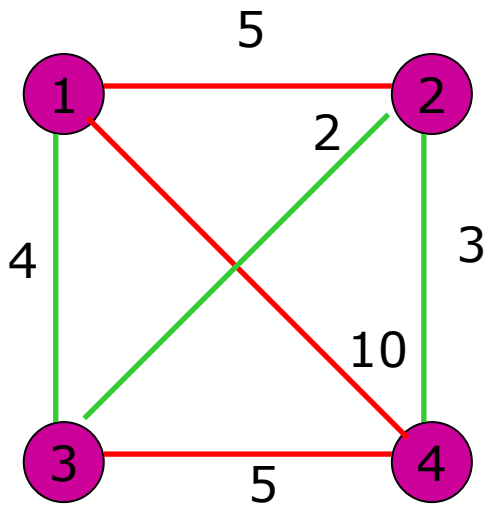
$$II = \{(2,4)\}$$

$$III = \{\}$$

$$a = \{1,2,3\}$$

$$b = \{4\}$$

Iteration III



- nichts zu tun, da alle Knoten in a sind

$$I = \{(1,3), (3,2), (2,4)\}$$

$$II = \{\}$$

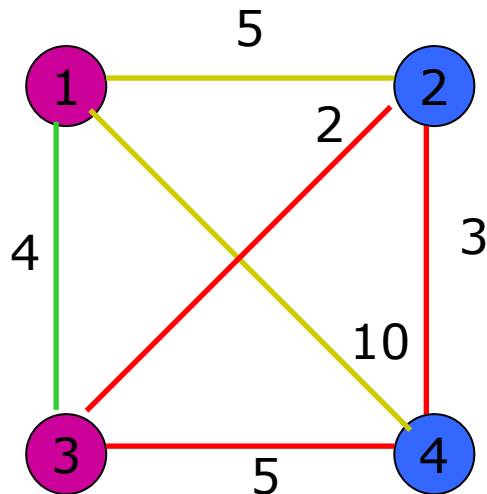
$$III = \{\}$$

$$a = \{1,2,3,4\}$$

$$b = \{\}$$

Iteration I

Start 1



- (1,3) ist kürzeste Kante
⇒ verschiebe sie nach I
und Knoten 3 nach a

$$I = \{(1,3)\}$$

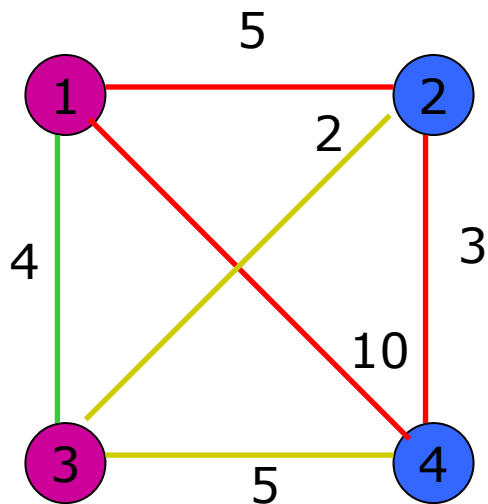
$$II = \{(1,2), (1,4)\}$$

$$III = \{(3,2); (3,4); (2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Iteration I



- 2 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,2) wird abgelehnt und (2,3)
übernommen
- 4 ist von 3 aus kürzer zu erreichen
=>(1,4) wird abgelehnt und (3,4)
übernommen

$$I = \{(1,3)\}$$

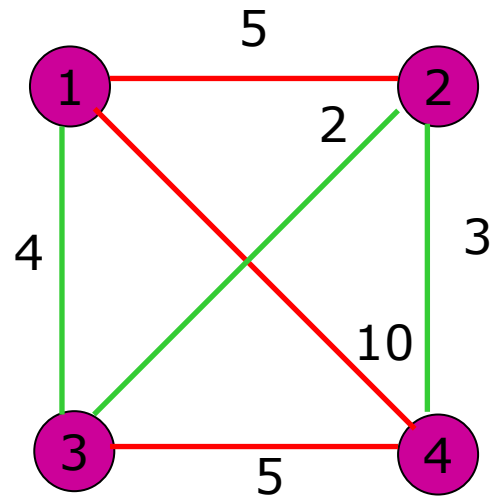
$$II = \{(3,2);(3,4); \}$$

$$III = \{(2,4)\}$$

$$a = \{1,3\}$$

$$b = \{2,4\}$$

Fertig



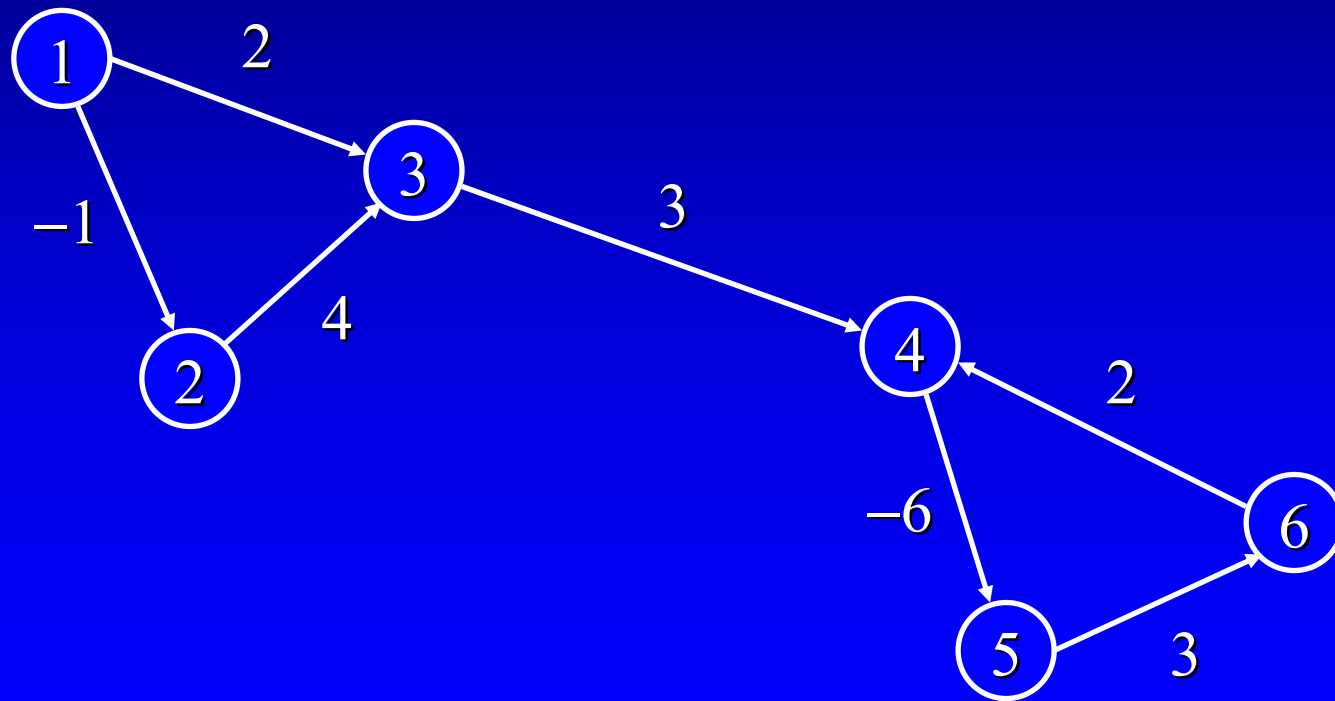
Kürzeste Wege

Der Algorithmus von Dijkstra

Kürzeste (billigste) Wege

Gerichteter Graph $G = (V, E)$

Kostenfunktion $c: E \rightarrow \mathbb{R}$



Entfernung zwischen zwei Knoten

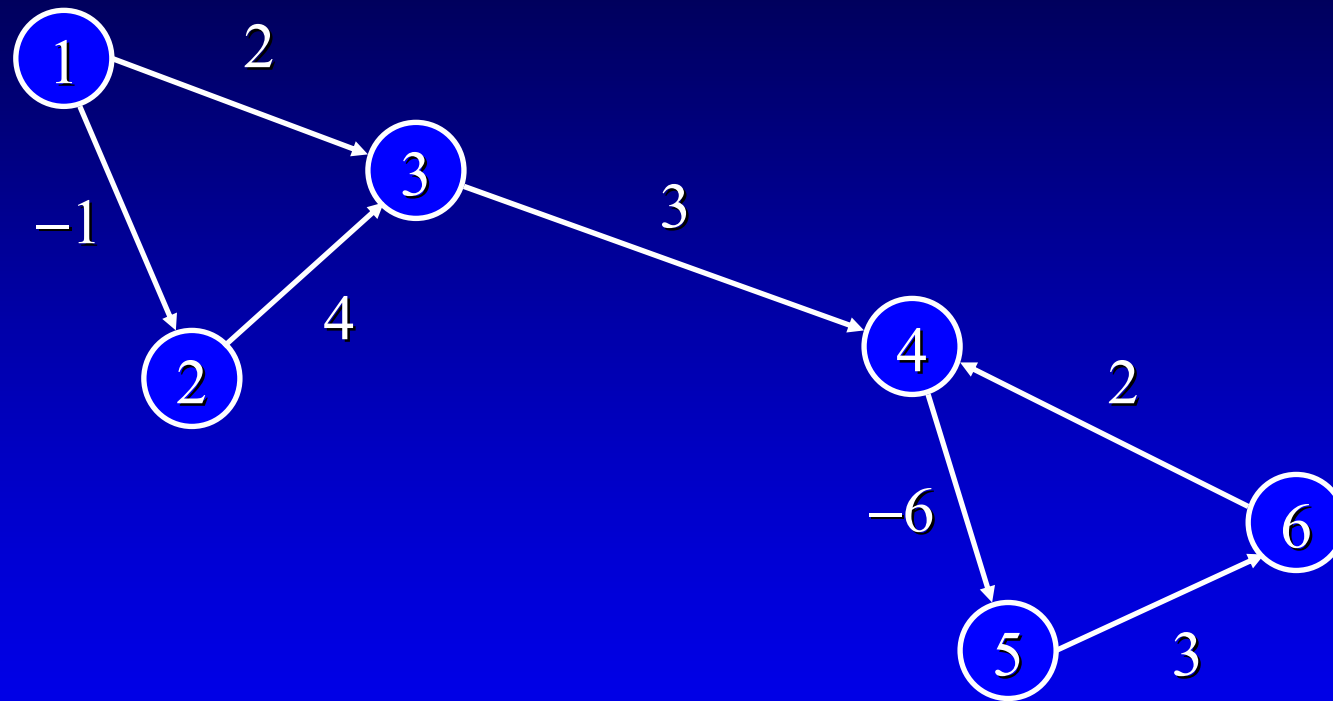
Kosten eines Wegs $P := v_0, v_1, \dots, v_l$ von v nach w

$$c(P) = \sum_{i=0}^{l-1} c(v_i, v_{i+1})$$

Entfernung von v nach w (nicht immer definiert)

$$\text{dist}(v, w) := \min\{ c(P) \mid P \text{ ist Weg von } v \text{ nach } w \}$$

Beispiel



$$\text{dist}(1,2) = -1$$

$$\text{dist}(1,3) = 2$$

$$\text{dist}(3,1) = 0$$

$$\text{dist}(3,4) = 2$$



Kürzeste Wege von einem Knoten s

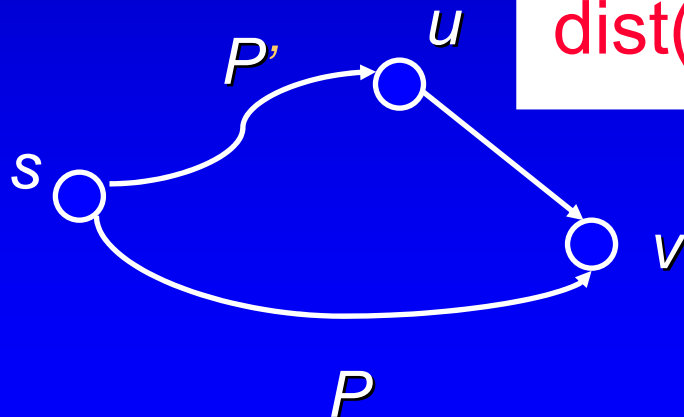
(Single Source Shortest Paths)

Eingabe: Netzwerk $G = (V, E, c)$ $c: E \rightarrow R$ Knoten s

Ausgabe: $\text{dist}(s, v)$ für alle $v \in V$

Beobachtung: dist -Funktion erfüllt eine **Dreiecksungleichung**

Sei $(u, v) \in E$ eine beliebige Kante



$$\text{dist}(s, v) \leq \text{dist}(s, u) + c(u, v)$$

P = kürzester Weg von s nach v

P' = kürzester Weg von s nach u

Problemvarianten

Das Problem der kürzesten Wege (KW-Problem) tritt in den folgenden Varianten auf:

1 1:1-KW-Problem (single-pair shortest-path problem)

Gesucht ist der kürzeste Weg von einem Knoten u zu einem Knoten v .

2 1:n-KW-Problem (single-source shortest-path problem)

Gesucht sind die kürzesten Wege von einem Quellknoten u zu allen anderen Knoten v .

3 n:1-KW-Problem (single-destination shortest-path problem)

Gesucht sind die kürzesten Wege zu einem Zielknoten v von allen anderen Knoten u .

4 n:n-KW-Problem (all-pairs shortest-path problem)

Gesucht sind kürzesten Wege zwischen allen Knoten des Graphen.

Kürzeste Wege von einem Knoten s

- Grundidee des Algorithmus:
Wenn der Knoten R auf dem minimalen Weg von P nach Q liegt ist der Weg von P nach R ebenfalls minimal
- Sonst wäre der Weg von P nach Q nicht minimal weil es eine kürzere Teilstrecke von P nach R gäbe

Kürzeste Wege von einem Knoten s

Die Grundidee ist, ausgehend vom Startknoten einen Teilgraphen zu wachsen zu lassen, der erst nur wenige Knoten, am Ende alle Knoten des Ausgangsgraphen umfasst.

Kanten werden in 3 Mengen aufgeteilt.

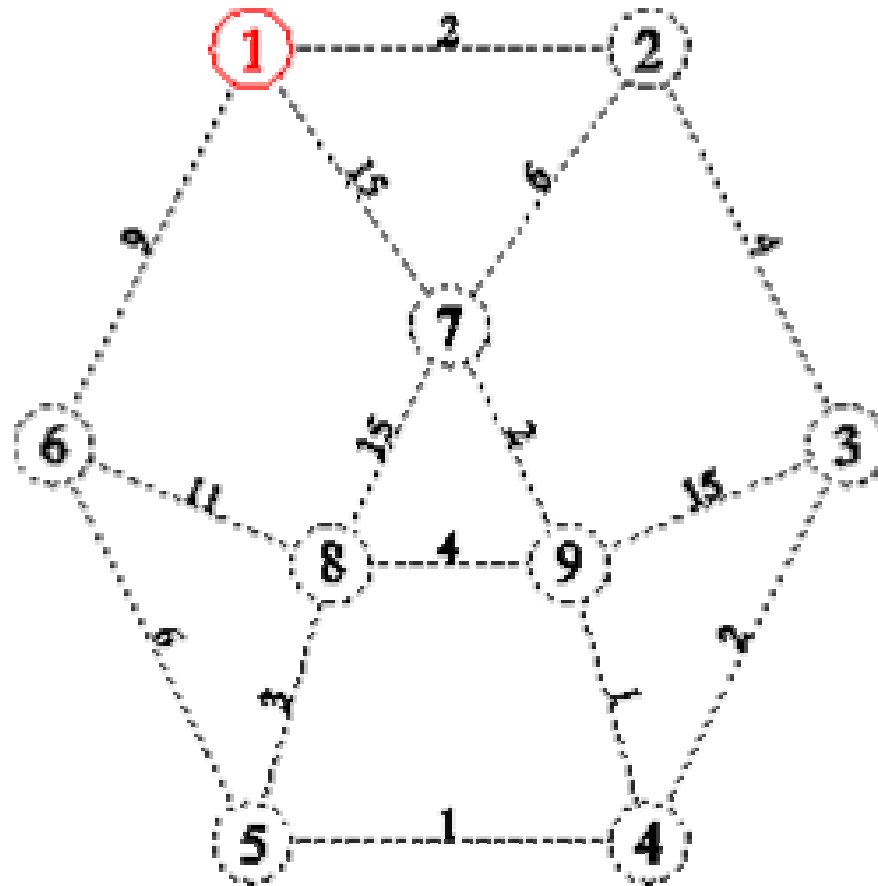
- I. Grüne Kanten sind Kanten, die auf einem kürzesten Weg im Teilgraphen vorkommen
- II. Rote Kanten sind bereits in den Teilgraphen aufgenommen worden. Sie gehören im Betrachtungszeitpunkt nicht zu einem kürzesten Weg.
- III. Schwarze Kanten sind die noch nicht untersuchten Kanten des Ausgangsgraphen

Knoten werden in 3 Mengen aufgeteilt

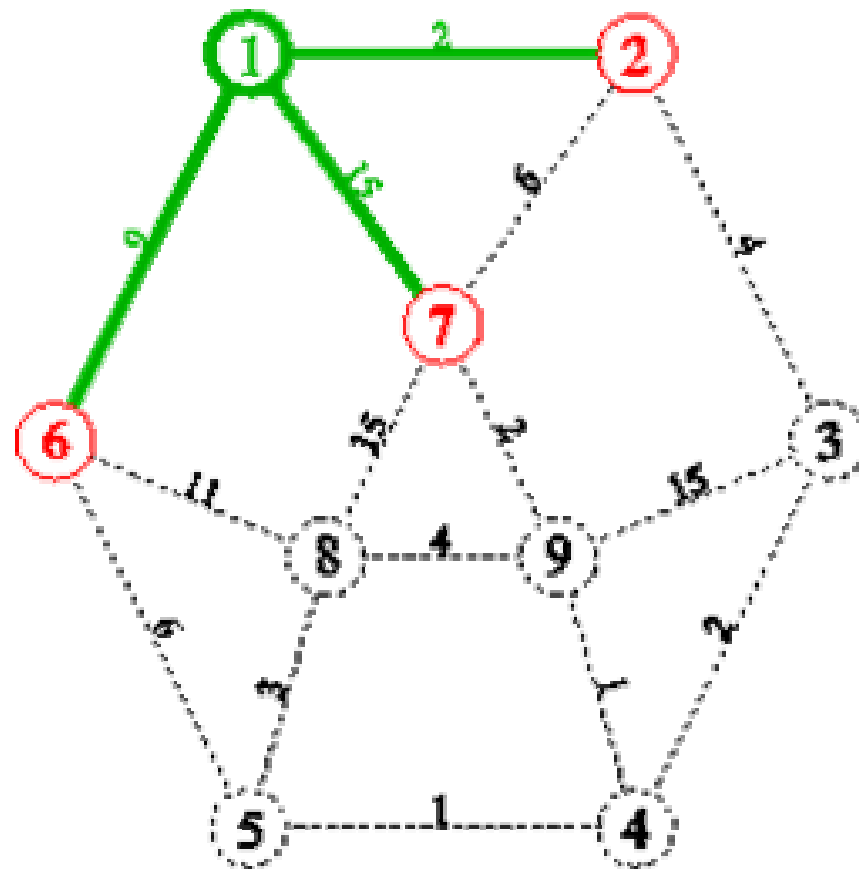
Grüne Knoten sind bereits abschließend besucht worden
Rote Knoten befinden sich am Rand des Teilgraphen. Sie sind also mit mindestens einer Kante mit einem Knoten verbunden, der grün ist.

Schwarze Knoten sind noch nicht in den Teilgraphen

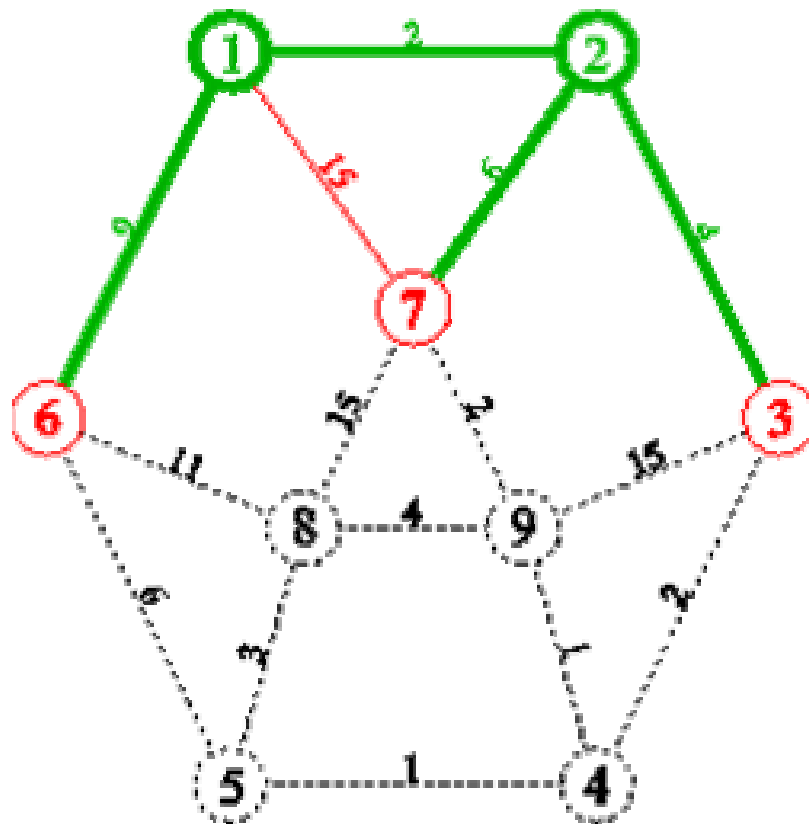
Zu Beginn wird der Graph initialisiert: Alle Knoten sind schwarz, alle Kanten ebenso. Der Startknoten wird rot gefärbt, befindet sich also alleinig auf dem Rand des Teilgraphen.



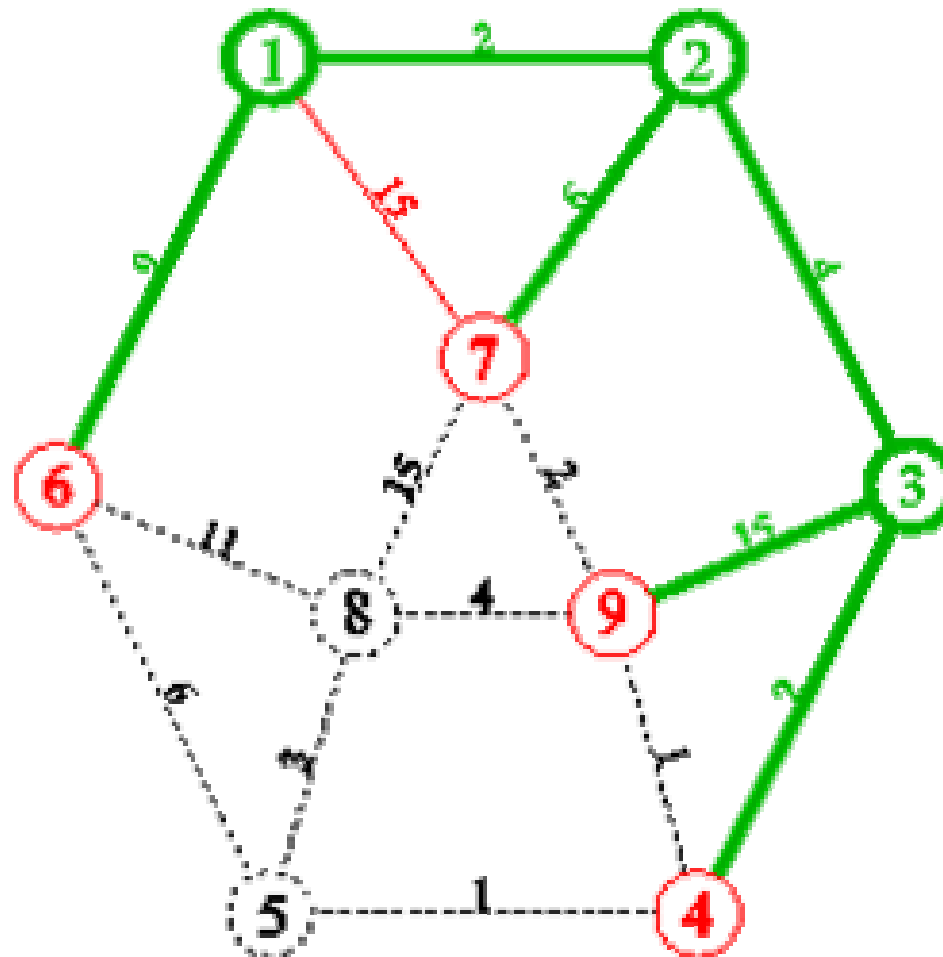
Dann wird der Startknoten grün gefärbt. Seine schwarzen Nachbarn 2, 6 und 7 werden rot gefärbt. Sie befinden sich jetzt am Rand des untersuchten Teilgraphen. 1 ist als einziger Knoten im Innern. Die zu 2, 6 und 7 führenden Kanten werden grün, da es die kürzesten Wege zu ihnen sind



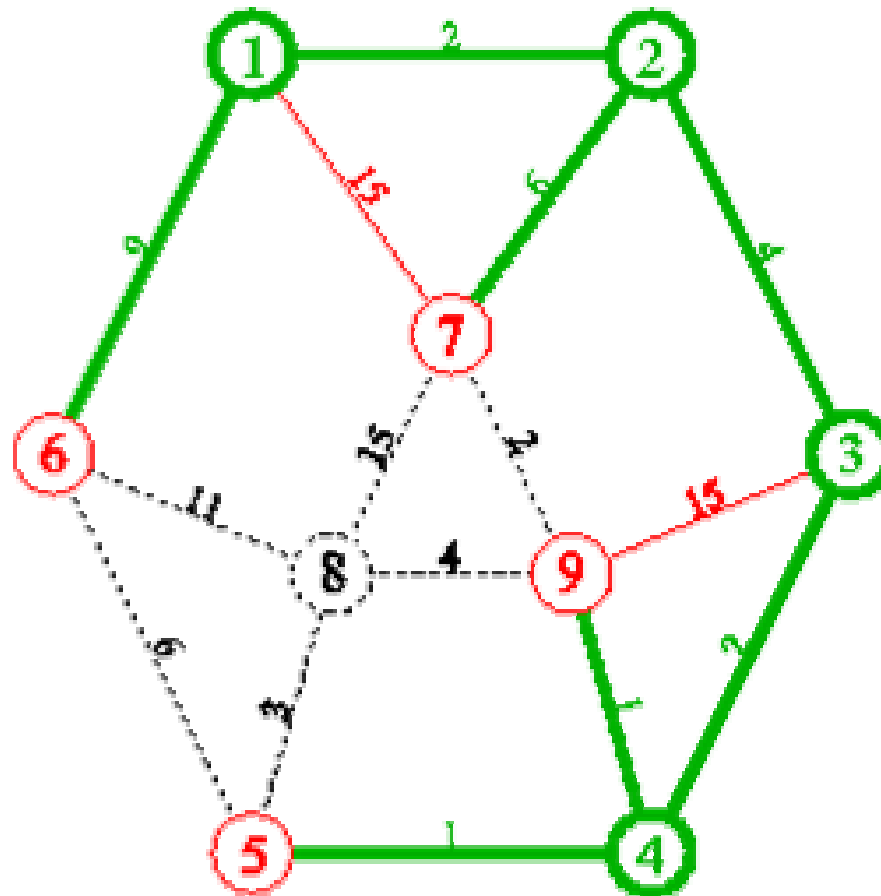
Der Knoten 2 ist nun der rote Knoten mit minimalem Abstand zu 1. Er wird grün gefärbt. Gleichzeitig werden seine Nachbarn 3 und 7 rot. Die Kante zu 3 wird grün, da sie auf dem bislang kürzesten Weg zu 3 liegt. Die Kante zu 7 wird ebenfalls grün, da der neue Weg über 2 eine Länge von $2 + 6 = 8$ aufweist, die bisherige Länge jedoch 15 war. Als Konsequenz dieser Grünfärbung mit *neuer* kürzester Länge wird die Kante von 1 zu 7 rot gefärbt, ist also nicht mehr Bestandteil eines kürzesten Weges



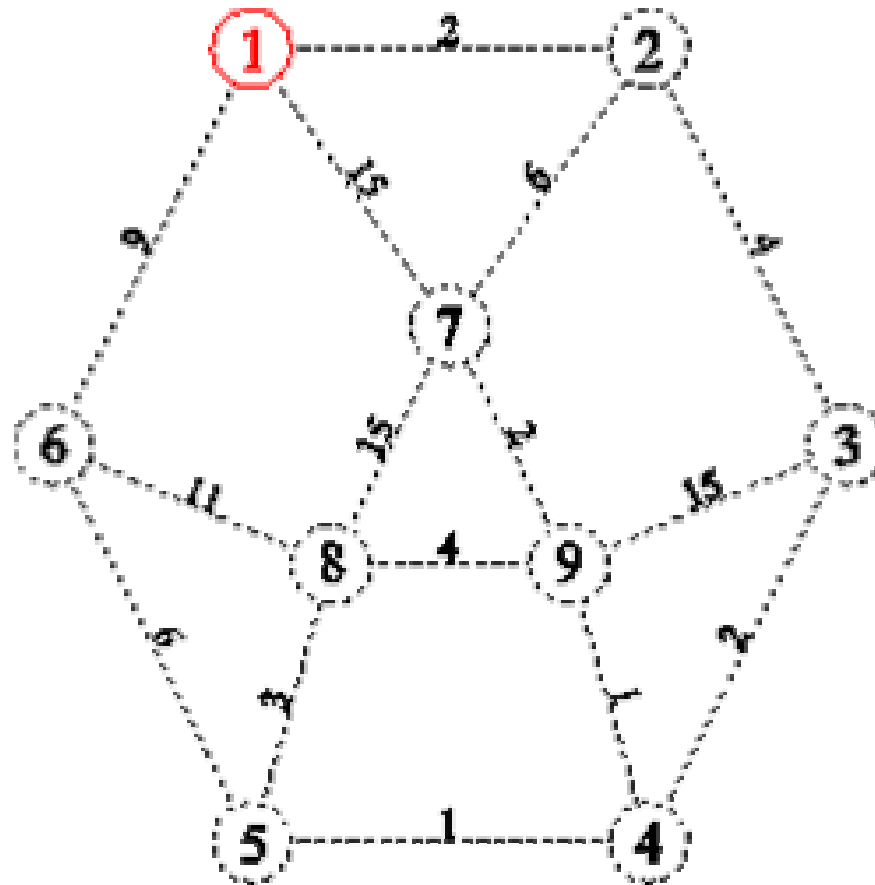
Nun ist der Knoten 3 mit einer Entfernung von 6 der Knoten mit der minimalen Entfernung zu 1. Dieser wird grün gefärbt, wandert also ins innere des Teilgraphen. Dabei werden 4 und 9 rot gefärbt, liegen also am Rand. Die Kanten zu 4 und 9 erhalten grüne Färbung.



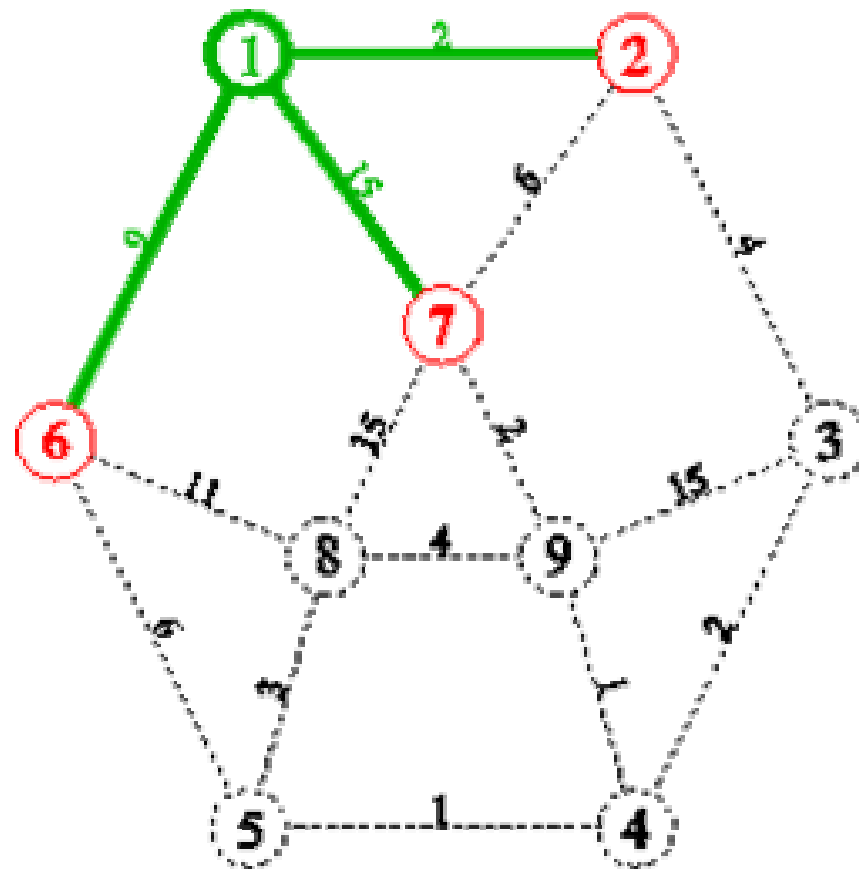
Minimal sind 4 und 7, Entfernung jeweils 8. Es wird zufällig 4 gewählt. Damit wird 4 grün und 5 und 9 rot. Da 9 erneut erreicht wird, wird die bisherige Entfernung 21 mit der neuen Entfernung über 4, also mit 9 verglichen. Da die neue kürzer ist, wird die Kante 4 nach 9 grün, die Kante 3 nach 9 rot



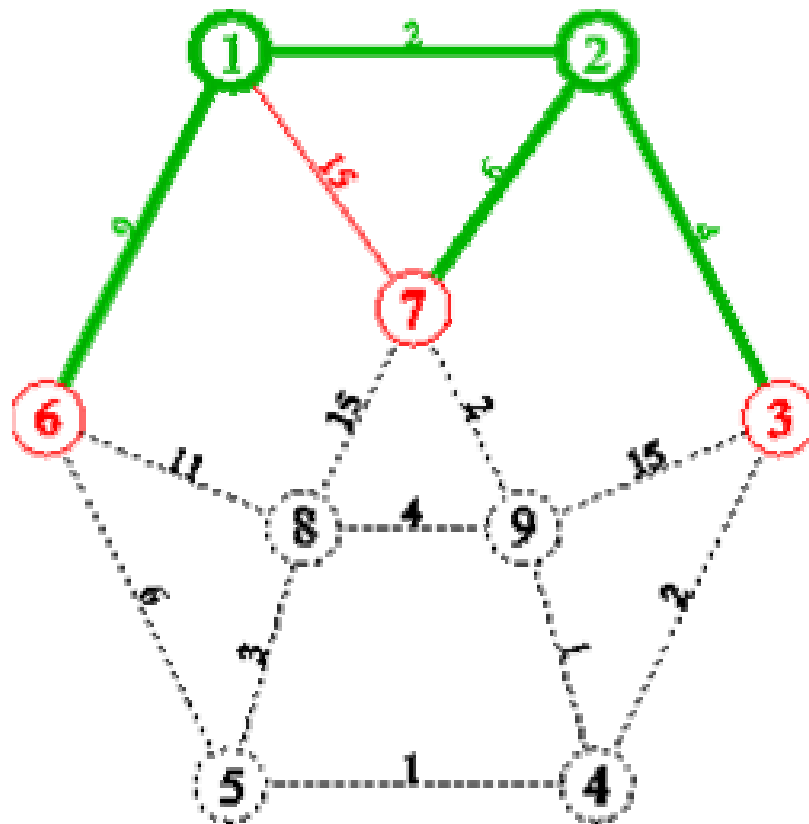
Zu Beginn wird der Graph initialisiert: Alle Knoten sind schwarz, alle Kanten ebenso. Der Startknoten wird rot gefärbt, befindet sich also alleinig auf dem Rand des Teilgraphen.



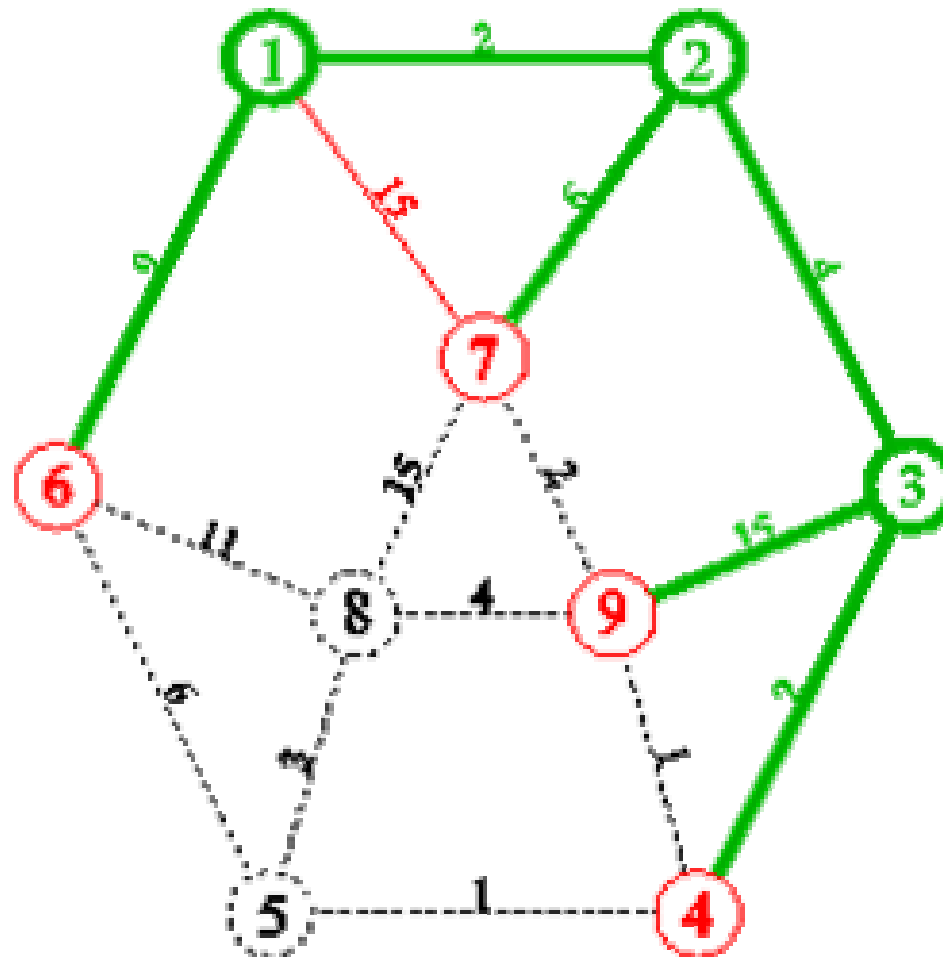
Dann wird der Startknoten grün gefärbt. Seine schwarzen Nachbarn 2, 6 und 7 werden rot gefärbt. Sie befinden sich jetzt am Rand des untersuchten Teilgraphen. 1 ist als einziger Knoten im Innern. Die zu 2, 6 und 7 führenden Kanten werden grün, da es die kürzesten Wege zu ihnen sind



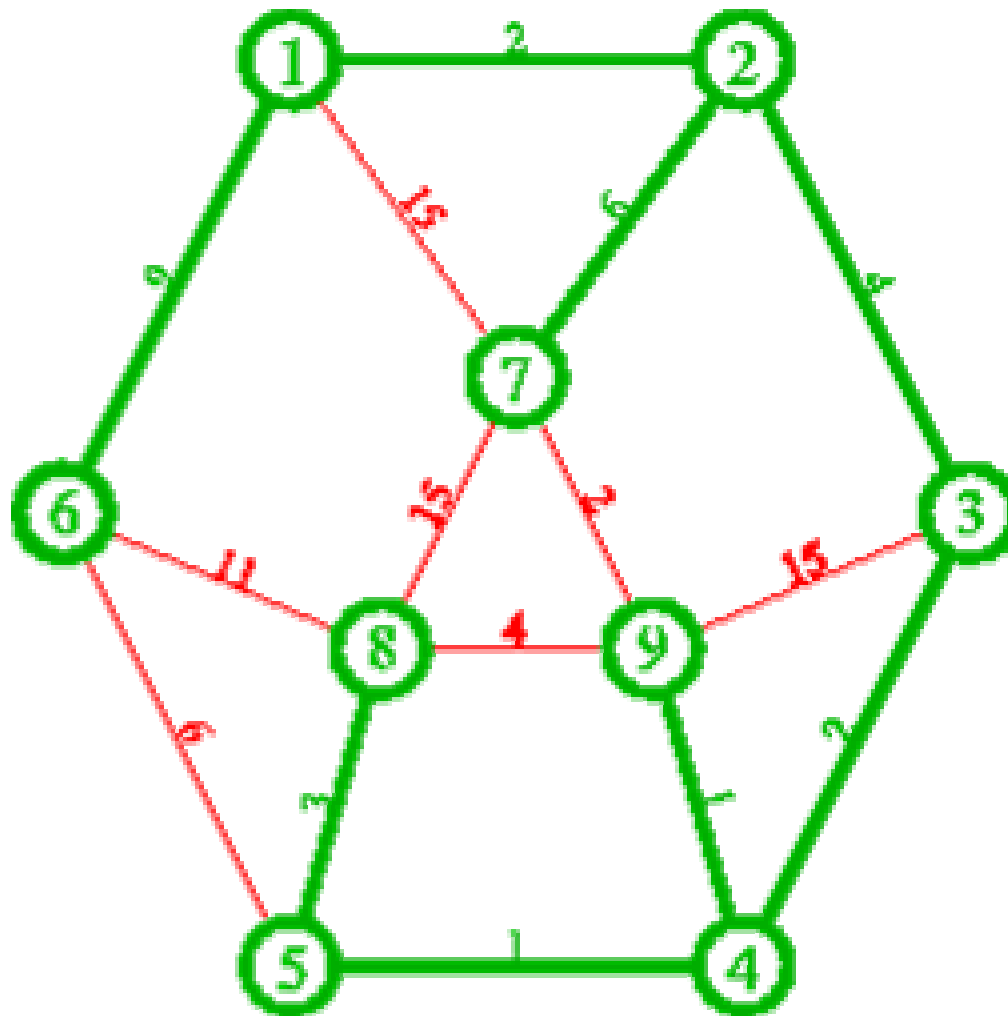
Der Knoten 2 ist nun der rote Knoten mit minimalem Abstand zu 1. Er wird grün gefärbt. Gleichzeitig werden seine Nachbarn 3 und 7 rot. Die Kante zu 3 wird grün, da sie auf dem bislang kürzesten Weg zu 3 liegt. Die Kante zu 7 wird ebenfalls grün, da der neue Weg über 2 eine Länge von $2 + 6 = 8$ aufweist, die bisherige Länge jedoch 15 war. Als Konsequenz dieser Grünfärbung mit *neuer* kürzester Länge wird die Kante von 1 zu 7 rot gefärbt, ist also nicht mehr Bestandteil eines kürzesten Weges



Nun ist der Knoten 3 mit einer Entfernung von 6 der Knoten mit der minimalen Entfernung zu 1. Dieser wird grün gefärbt, wandert also ins innere des Teilgraphen. Dabei werden 4 und 9 rot gefärbt, liegen also am Rand. Die Kanten zu 4 und 9 erhalten grüne Färbung.



Schließlich verbleibt nur noch Knoten 8. Dieser wird abschließend grün gefärbt. Da keine roten Nachbarknoten mehr zu betrachten sind, ist nichts weiteres zu tun



Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra



Einführung u.
Wiederholung wichtiger
Grundbegriffe

M.B. Wischnewsky

24.04.2007

Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Kap. 0 Gruppen



Universität Bremen

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition 0.11

Es seien G eine nichtleere Menge, eine Abbildung $T : G \times G \rightarrow G$ und $e \in G$ ein Element.

Man nennt (G, T, e) eine **Gruppe**, wenn gilt

G1) T ist **assoziativ**,

$$\forall a, b, c \in G: (aTb) Tc = aT (bTc)$$

G2) e ist ein **neutrales Element**:

$$\forall a \in G: eTa = aTe = a$$

G3) alle Elemente haben ein **Inverses**,

$$\forall a \in G \exists a^{-1} \in G: aT a^{-1} = a^{-1}Ta = e$$

Grundlegende Definitionen und Beispiele

- G ist die *Trägermenge* der Gruppe,
- τ die *Gruppenoperation*.
- Ist die Gruppenoperation **kommutativ**, d.h.
- **G4)** $\forall a, b \in G : a \tau b = b \tau a$

- **so spricht man von einer**
- **kommutativen oder abelschen Gruppe.**

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Gruppen

Symmetrische Gruppe:

Für jede nichtleere Menge M ist die Menge

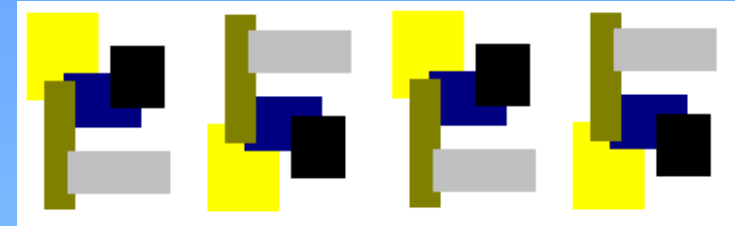
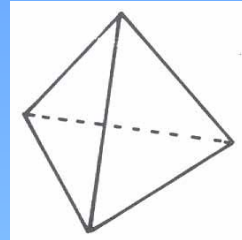
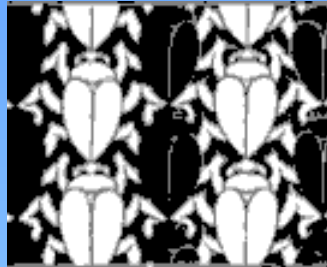
$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

aller bijektiven Selbstabbildungen mit der
Abbildungskomposition eine Gruppe.

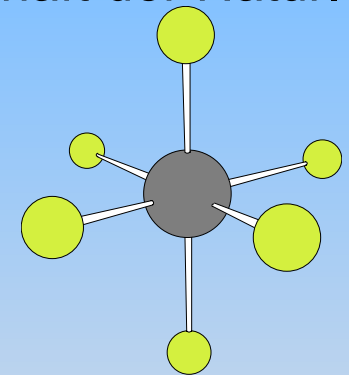
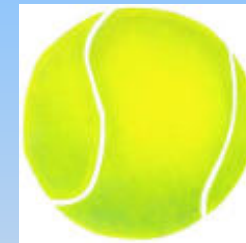
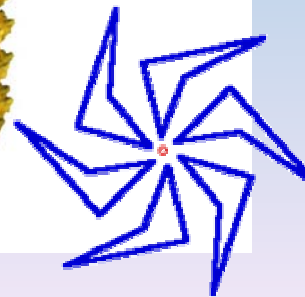
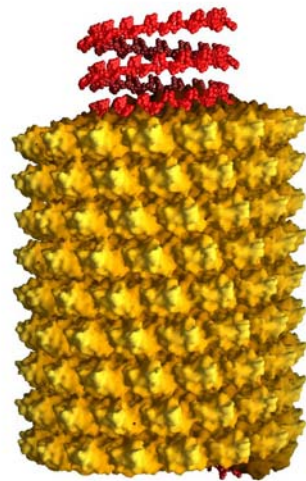
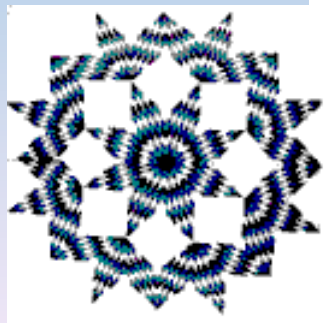
$S(M)$ heißt die **symmetrische Gruppe** auf M ,
ihre Elemente heißen ***Permutationen von M*** .

Anwendungen der Gruppen Theorie

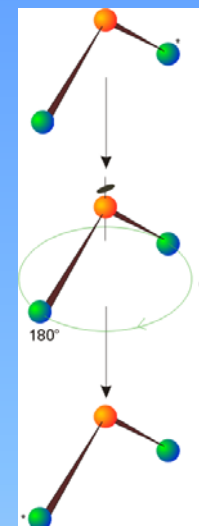
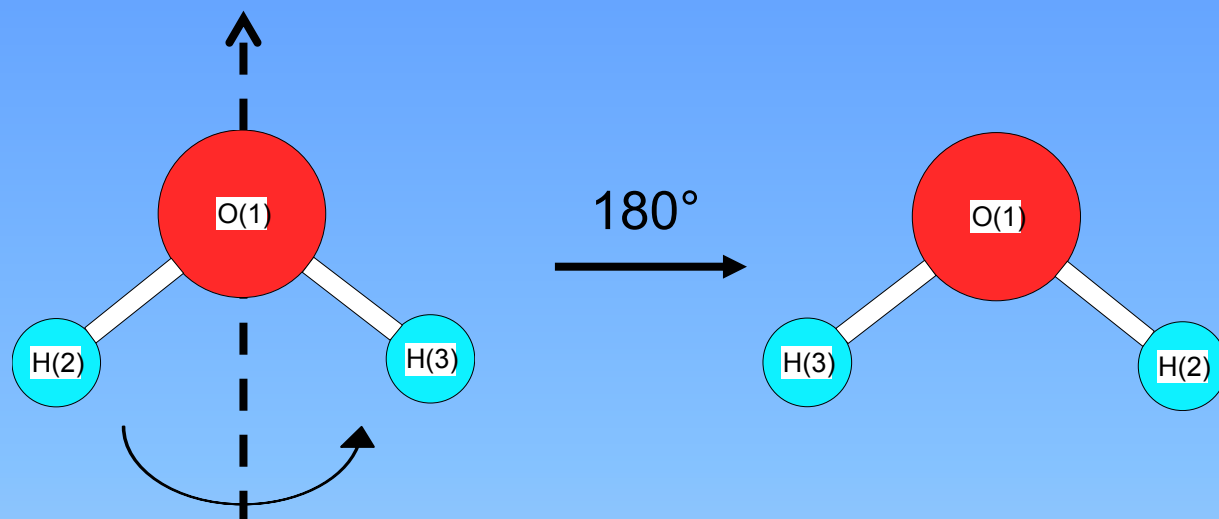
Beschreibung von Symmetrien



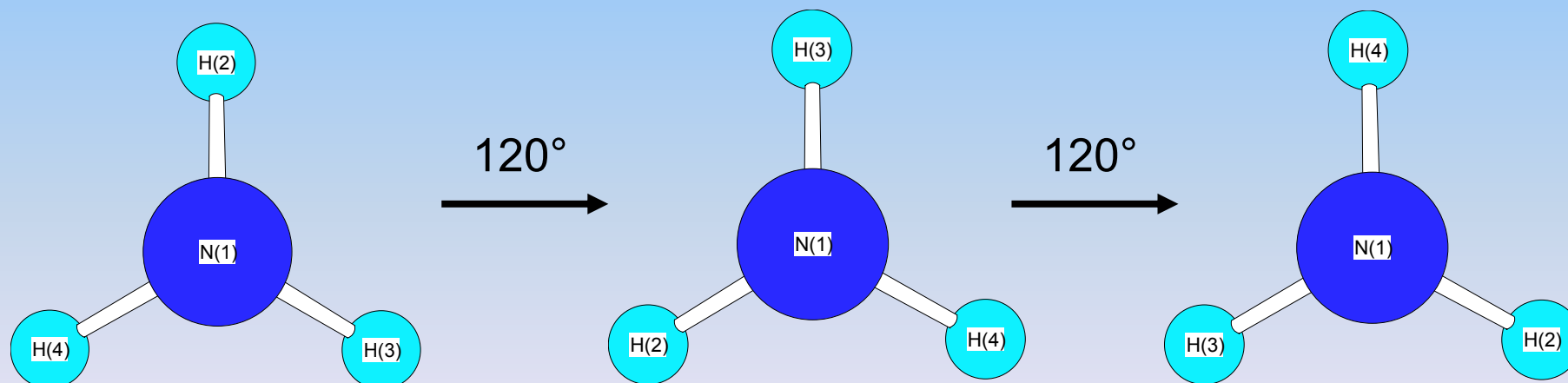
Symmetrie umgibt uns überall. Sie ist eine grundlegende Eigenschaft der Natur.



n-fach Rotation - eine Rotation von $360^\circ/n$ um die C_n Achse ($n = 1$ to ∞)



In Wasser gibt es eine C_2 Achse, so dass wir eine 2-fach (180°) Rotation durchführen können, die zur gleichen Anordnung der Atome führt.



In Ammoniak haben wir eine C_3 Achse, so dass wir eine 3-fach (120°) Rotation durchführen können, die zur gleichen Anordnung der Atome führt

Spezialfall: Symmetrische Gruppe S_n

- Definition (S_n):
- S_n bezeichne die Menge aller Permutationen der Menge $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, d.h. die Menge der bijektiven Abbildungen von N_n .
- S_n heißt **symmetrische Gruppe**.
- $\pi \in S_n$ heißt *Permutation vom Grade n*
- **Anzahl der Elemente von S_n : $n!$**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \pi[1] & \pi[2] & \pi[3] & \dots & \pi[n-1] & \pi[n] \end{pmatrix}$$

Gruppenhomomorphismus

- Definition 0.12
- Seien G und G' zwei Gruppen, wobei die jeweiligen neutralen Elemente mit $e \in G$ bzw. mit $e' \in G'$ bezeichnet seien.
- Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ eine Abbildung, dann nennen wir φ einen **Gruppenhomomorphismus**, falls sie die folgende Bedingung erfüllt
 - $\forall x; y \in G$ gilt $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$
- und in diesem Fall erfüllt φ sogar die beiden weiteren Eigenschaften
 - $\varphi(e) = e'$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$



Gruppenhomomorphismen

- Definition 0.13
- Seien G, G' Gruppen.
- 1. Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ eine Abbildung, dann nennen wir φ einen **Gruppenhomomorphismus**, falls sie die folgende Bedingung erfüllt
 - $\forall x, y \in G$ gilt $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$
- 2. Ein injektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch **Monomorphismus**.
- (Cf. griechisch $\mu\omicron\nu\omicron\varsigma$ einzig, z.B. der Monarch als Alleinherrscher.)
- 3. Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch **Epimorphismus**.
- (Cf. griechisch $\epsilon\pi\iota$ darauf, z.B. das Epizentrum eines Erdbebens, das auf der Erdoberfläche über dem Zentrum im Erdinneren liegt.)



Gruppenhomomorphismen

4. Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt auch Isomorphismus. (Cf. griechisch *ίσος* derselbe, z.B. das Iso-top als Element am selben Platz im Periodensystem.)
5. Zwei Gruppen heißen isomorph genau dann, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.
6. Ein Gruppenhomomorphismus einer Gruppe in sich selbst heißt auch Endomorphismus. (Cf. griechisch *ενδο* in hinein, z.B. die Endo-skopie, bei der man in den Körper hinein schaut.)



Körper

Definition 0.14: Ein *Körper* K ist eine Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen (Addition, Multiplikation) $K \times K \rightarrow K$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1° K ist eine additive abelsche Gruppe bezüglich der Addition (mit Nullelement 0).
- 2° $K \setminus \{0\}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation (mit Einselement 1).
- 3° $a(b+c) = ab + ac$ für alle a, b, c aus K .

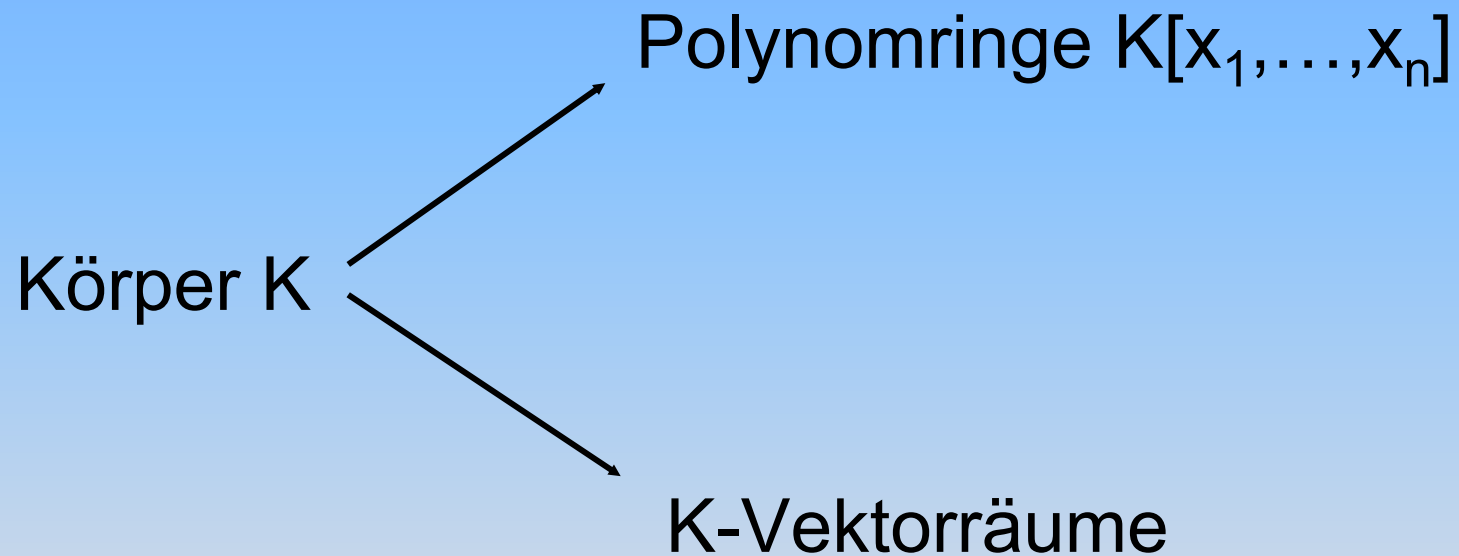
(0.15) Beispiele:

- 1° \mathbb{R} , und \mathbb{Q} sind Körper, \mathbb{Z} ist aber kein Körper.
- 2° Die zweielementige Gruppe : $G = \{0, 1\}$ mit
 $0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$ und $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.
- 3° Endliche Körper mit p Elementen (p Primzahl): $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$



Anwendungsbereiche

„Neue mathematische Strukturen über Körpern“



Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra

Kap. 1 Vektorräume und
lineare Abbildungen

Der Standardraum \mathbb{R}^n

$$\text{Def. 1.1. } \mathbb{R}^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\} =$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Es werden zwei *Verknüpfungen* definiert auf \mathbb{R}^n , die *Addition* von Spaltenvektoren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Der Standardraum \mathbb{R}^n

Also

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$$

Die *Skalarmultiplikation* wird definiert durch

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{x}_1 \\ \lambda \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M} \\ \lambda \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbf{R} .$$

Der Standardraum \mathbb{R}^n

(1.2) Rechenregeln: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $r, s \in \mathbf{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt:

- 1° $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 2° Für den Vektor \mathbf{o} aus \mathbb{R}^n mit lauter Nullen als Komponenten gilt:
 $x + \mathbf{o} = x = \mathbf{o} + x$.
- 3° Zu jedem x aus \mathbb{R}^n existiert $-x$ aus \mathbb{R}^n mit $x + (-x) = \mathbf{o}$.
- 4° $x + y = y + x$
- 5° $r(sx) = (rs)x$
- 6° $1x = x$
- 7° $r(x + y) = rx + ry$
- 8° $(r+s)z = rz + sz$

- Der Nullvektor \mathbf{o} wird auch mit 0 bezeichnet. Vorsicht!

Der abstrakte Vektorraum*

Der Begriff des Vektorraumes ist wie folgt definiert:

Definition 1.3: Ein *Vektorraum über dem Körper K* ist eine additive abelsche Gruppe V , also für alle x, y, z aus V :

$$1^\circ (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$2^\circ \text{ Es gibt } 0 \text{ (Nullvektor) mit: } x + 0 = x = 0 + x .$$

$$3^\circ \text{ Zu jedem } x \text{ aus } V \text{ existiert } -x \text{ aus } V \text{ mit } x + (-x) = 0 .$$

$$4^\circ x + y = y + x ,$$

zusammen mit einer **Skalarmultiplikation** $K \times V \rightarrow V, (r, v) \mapsto rv$,
so dass für alle x, y aus V und alle r, s aus K :

$$5^\circ 1x = x .$$

$$6^\circ r(x + y) = rx + ry .$$

$$7^\circ (r + s)x = rx + sx .$$

$$8^\circ (rs)x = r(sx) .$$

* Stefan Banach 1922

Der Standardraum \mathbb{R}^n

$$\text{Def. 1.1. } \mathbb{R}^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\} =$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Es werden zwei *Verknüpfungen* definiert auf \mathbb{R}^n , die *Addition* von Spaltenvektoren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$