

Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra



Elementare Theorie der Vektorräume

M.B. Wischnewsky
27. 04. 2007

Klassische Algebra

Ausgangspunkt: Lösung von algebraischen Gleichungen

Gleichungen

Auflösbarkeit von Gleichungen
(Galoistheorie)

Fundamentalsatz der Algebra (Existenz
von Wurzeln ganzrationaler Funktionen)

Näherungsverfahren zur Lösung von
Gleichungen (z.B. Newton-Verfahren)

Beispiel: $a_n \cdot x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$



Moderne Algebra

Die moderne Algebra hat sich
inzwischen grundlegend gewandelt.

**Aus der *Theorie der Gleichungen* ist die
Theorie der algebraischen Strukturen
geworden,**

**Gegenstände des Interesses sind u.a.
Gruppen, Ringe, Körper, Algebren
und deren Anwendungen usw..**



Lineare Algebra

Ausgangspunkt: Lösung linearer Gleichungssysteme

Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Definition 0.1: Ein *lineares Gleichungssystem* in n Unbestimmten und in m Gleichungen ist definiert durch:

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n = b_1$$

$$a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n = b_2$$

M

M

$$a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n = b_m$$

Die a_j^i sind die *Koeffizienten* aus \mathbb{R} . Die b_j sind weitere Zahlen, auch die *Konstanten* genannt, und die x_i sind die *Unbestimmten*, bzw. die Unbekannten, die Veränderlichen.



Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n & = & b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n & = & b_2 \\ \text{M} & & \text{M} \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems werden zusammengefasst zu einer *Matrix*:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \text{M} & & & \text{M} \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \text{M} \quad \quad \quad \text{M} \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n = b_m \end{array}$$

Definition 0.2 Matrixoperation:

Eine Matrix A der obigen Form wirkt auf einen Spaltenvektor x auf die folgende Weise:

$$Ax := \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n \\ \quad \quad \quad \text{M} \quad \quad \quad \text{M} \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \text{M} \\ x_n \end{pmatrix}$$

dadurch wird eine Abbildung definiert

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \rightarrow Ax$$

$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ sind „Vektorräume“ und L_A ist eine „lineare“ Abbildung

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \Lambda + a_1^n x_n & = & b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \Lambda + a_2^n x_n & = & b_2 \\ \text{M} & & \text{M} \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \Lambda + a_m^n x_n & = & b_m \end{array}$$

Mit dieser Notation hat das lineare Gleichungssystem aus 1.1 die Form:

$$Ax = b$$

Die in 1.2 eingeführte Matrixoperation liefert eine Abbildung

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \rightarrow Ax$$

Die Frage, ob $Ax = b$ eine Lösung hat, lässt sich daher auffassen, ob b in der Bildmenge $\text{Bi}(L_A) := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ von L_A vorkommt.

Die lineare Algebra ist das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen

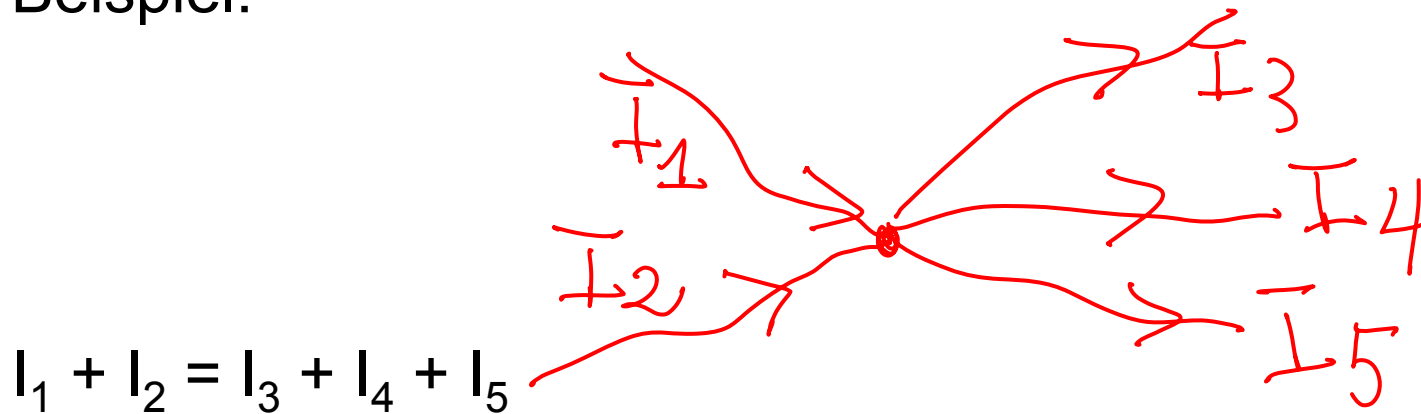
Beispiel

Kirchhoffsche Gesetze

a) Es muss gelten:

Ankommende Ladung = abfließende Ladung
, wegen „Ladungserhaltung“

Beispiel:



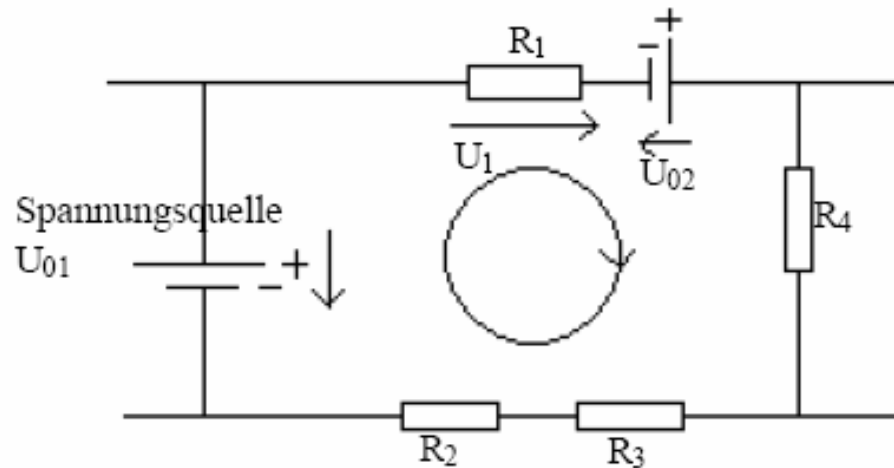
1. Kirchhoffsches Gesetz: Knotenregel

Die Summe aller Ströme an einem Stromknoten ist null:

$$\sum I_i = 0$$

Kirchhoffsche Gesetze

b) 2. Kirchhoffsches Gesetz: Maschenregel



$$U = R \cdot I$$

Spannungen gehen von + nach - Pol (Spannungsabfall)

Entlang einer geschlossenen Leiterbahn (Masche) ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

$$\sum_i U_{oi} - \sum_k U_k = 0$$

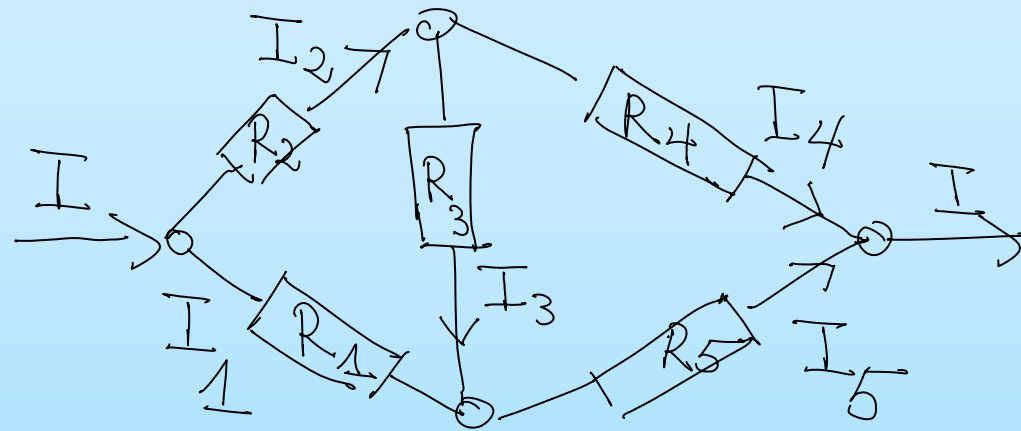
Spannungsquellen

Spannungsabfall (Verbraucher)

Spannungsquellen

Summe aller treibenden Spannungen (Batterie) = Summe aller Spannungsabfälle





$$I_1 + I_2 = I$$

$$I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_1 + I_3 - I_5 = 0$$

$$-R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = 0$$

$$-R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5 = 0$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 - R_5 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem: Gesucht I_1, \dots, I_5 so dass

$$A \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



Der abstrakte Vektorraum*

Der Begriff des Vektorraumes ist wie folgt definiert:

Definition 1.3: Ein *Vektorraum* über dem Körper K ist eine additive abelsche Gruppe V , also für alle x, y, z aus V :

$$1^\circ (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$2^\circ \text{ Es gibt } 0 \text{ (Nullvektor) mit: } x + 0 = x = 0 + x .$$

$$3^\circ \text{ Zu jedem } x \text{ aus } V \text{ existiert } -x \text{ aus } V \text{ mit } x + (-x) = 0 .$$

$$4^\circ x + y = y + x ,$$

zusammen mit einer *Skalarmultiplikation* $K \times V \rightarrow V, (r, v) \mapsto rv$,
so dass für alle x, y aus V und alle r, s aus K :

$$5^\circ 1x = x .$$

$$6^\circ r(x + y) = rx + ry .$$

$$7^\circ (r + s)x = rx + sx .$$

$$8^\circ (rs)x = r(sx) .$$

* Stefan Banach 1922

Der abstrakte Vektorraum

Die Axiome 1-8 garantieren, dass man mit Summen, Differenzen und Vielfachen wie gewohnt rechnen darf. Insbesondere gelten:

- $-a = (-1)a$
- $-(-a) = a$
- $-(a+b) = -a - b$
- $sa = 0 \iff s = 0 \text{ oder } a = 0$

Der abstrakte Vektorraum*

- $sa = 0 \iff s = 0 \text{ oder } a = 0$

Beweis

1) „ \rightarrow “ Sei $sa=0$

Annahme Sei $s \neq 0$. Dann existiert das Inverse s^{-1} .

Hiermit gilt: $0 = s^{-1}0 = s^{-1}(sa) = (s^{-1}s)a = 1a = a$.

Hieraus folgt $a = 0$.

2) „ \leftarrow “ Sei $s=0$ oder $a=0$. Dann gilt offensichtlich $sa=0$.

Der abstrakte Vektorraum

Beispiele

(1) Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl.

$$K^n := \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in K, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ist ein Vektorraum über K mit folgender Addition u. skalaren Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad \lambda \in K$$

Der abstrakte Vektorraum

Beispiele

(2) Räume von Abbildungen:

Sei K ein Körper und M eine nichtleere Menge.

Die Menge der Abbildungen $K^M := \text{Abb}(M, K)$

ist in natürlicher Weise ein K -Vektorraum bezüglich:

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) ,$$

$$(\lambda f)(m) := \lambda f(m)$$

für alle $f, g \in K^M$, $\lambda \in K$ und $m \in M$.

Bemerkungen:

1° Der Standardraum K^n kann als Abbildungsraum aufgefasst werden. Für $M = \{1, 2, \dots, n\}$ ist $K^M = K^n$.

Der abstrakte Vektorraum

Beispiele

(3) Verallgemeinerung:

Für einen Vektorraum V über K ist

$V^M := \text{Abb}(M, V)$ wieder ein K -Vektorraum.

(4) Polynome vom Grade $\leq n$ über einem Körper K

$$P_n := \{ p(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n; a_i \in K (i=0, \dots, n) \}$$

ist mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum mit $p(x)=0$ für alle x und

$q(x) = -a_0 - a_1x^1 - \dots - a_nx^n$ als Inverses zu $p(x)$.

(5) $C^0(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ ist ein Vektorraum mit der üblichen punktweisen Addition und skalaren Multiplikation



Polynomringe

Definition

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.
Dann nennen wir die Abbildung:

$$p : R \rightarrow R, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Polynom ("über R).

Dabei ist $x^k := x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, k -mal.

a_0, \dots, a_n heißen Koeffizienten von p .

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p : $n = \deg(p)$.

(Beispiel: $p(x) = 5x^3 - 1,3x + 6$ ist Polynom 3. Grades.)

Die Menge aller Polynom über R bezeichnen wir $R[x]$.



Polynomringe

**Auf $R[x]$ definieren wir bekanntlich eine
Addition und eine Multiplikation
"punktweise"**

durch

$$(p + q)(x) := p(x) + q(x)$$

$$(p \cdot q)(x) := p(x) \cdot q(x).$$

**Satz $(R[x], +, \cdot)$ ist ein Ring, der Polynomring
über R .**

W

Polynomringe

Satz

Mit $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ gilt:

$$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k$$

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{n+n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i, j \leq n}} a_i b_j \right) x^k.$$



Lineare Abbildungen

Definition

Seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt eine **lineare Abbildung** (Homomorphismus), wenn für alle $x, y \in V$ und alle $\alpha \in K$ gelten:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Die Konstruktion von Vektorräumen

1) Untervektorräume

Definition: Sei V ein Vektorraum über K .
Eine nichtleere Menge U in V ist genau dann ein
Untervektorraum, wenn gelten:

- U1) für alle $x, y \in U \rightarrow x+y \in U$ und
- U2) für alle $r \in K$ und $x \in U \rightarrow rx \in U$.

Beispiele: Sei V ein Vektorraum über K .

1. $\{0\}$ und V sind Untervektorräume von V .

2. Sei $x \in V$.

Dann ist die Menge $Kx := \{rx : r \in K\}$ ein Untervektorraum von V .

3. Sind $U_i, i \in I$ eine Familie von Untervektorräumen von V , so ist auch der Durchschnitt $\bigcap U_i$ ein Untervektorraum.

$Kx := \{rx : r \in K\} \subset V$ ist ein Untervektorraum

Beweis:

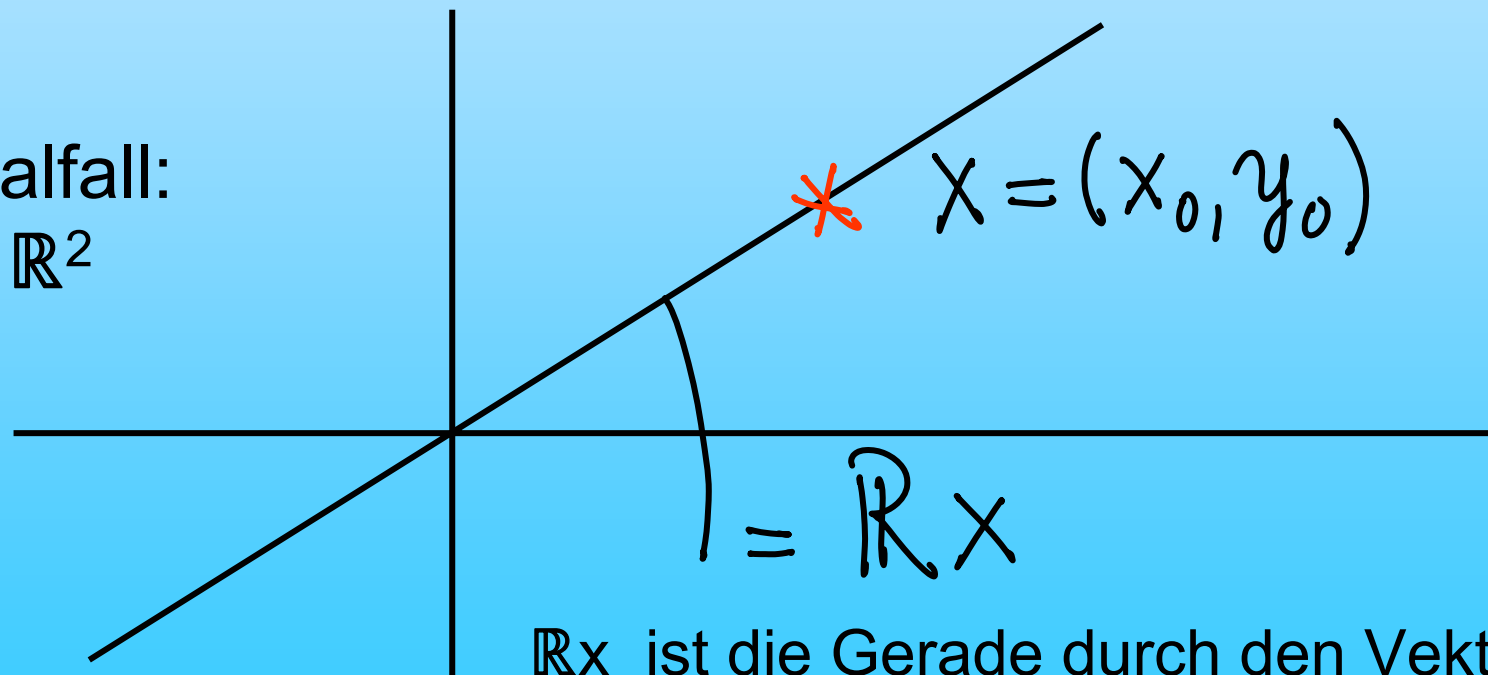
1) Seien $rx, r'x \in Kx$. Dann gilt:

$$rx + r'x = (r + r')x \in Kx$$

2) Sei $rx \in Kx$ und $s \in K$. Dann gilt: $s(rx) = (s \cdot r)x \in Kx$

Spezialfall:

$$V = \mathbb{R}^2$$



2. Kern linearer Abbildungen

Definition

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

$\text{Ker}(f) := \{x \in V: f(x) = 0\}$ heißt der **Kern von f**

Lemma. $\text{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V .

Beweis Seien $x, y \in \text{Ker}(f)$ und $\alpha \in K$. Dann gelten

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 \quad \rightarrow \quad x+y \in \text{Ker}(f), \text{ und}$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha x \in \text{Ker}(f)$$

Analog gilt: Das Bild von f : $\text{Bi}(f) := \{f(x); x \in V\}$ ist ein Unterraum von W



3) Linearkombination und Erzeugendensystem

Definition Sei V ein K -Vektorraum.

1. Für Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ und $s_1, s_2, \dots, s_m \in K$, heißt

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_m a_m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} s_{\mu} a_{\mu}$$

Linearkombination der a_1, a_2, \dots, a_m .

2°. Für eine Teilmenge A aus V heißt die Menge aller (endl.) Linearkombinationen von Elementen aus A die **lineare Hülle** von A (abgekürzt $\text{Lin}(A)$)

3. Eine Teilmenge A aus V heißt **Erzeugendensystem** des Vektorraums V , wenn $\text{Lin}(A) = V$ gilt.

3) Linearkombination und Erzeugendensystem

Satz Sei A eine Teilmenge eines Vektorraumes V über einem Körper K .

Dann ist die lineare Hülle von A ein Unterraum von V .

Beweis:

- 1) Die Summe zweier Linearkombination über A ist wieder eine Linearkombination über A , und
- 2) Ist $s \in K$ Ein Skalar und p eine Linearkombination über A , dann ist $s \cdot p$ wieder eine Linearkombination über A .

Satz Sei $A \subseteq V_K$ Teilmenge. Dann gilt

$$\text{Lin}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^m r_k a_k \mid r_k \in K, a_k \in A; m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \bigcap_{\substack{A \subseteq U \\ U \text{ Unterraum von } V}} U$$

Beweis

1) zu zeigen: $\text{Lin}(A) \subseteq \bigcap_{\substack{A \subseteq U \\ U \text{ Unterraum von } V}} U$

Beweis Sei U Unterraum von V mit $A \subseteq U \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n a_n \in U \Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \in \bigcap_{A \subseteq U} U$$


2) zu zeigen $\bigcap_{A \subseteq U} U \subseteq \text{Lin}(A)$.
 $U \subseteq V$ Untervektorraum.

Beweis

$\text{Lin}(A)$ ist ein Unterraum von V mit

$$A \subseteq \text{Lin}(A) \Rightarrow$$

$$\bigcap_{A \subseteq U} U \subseteq \text{Lin}(A).$$

$$A \subseteq U$$

U Unterraum \square



Der Standardraum K^n

Beispiel

. Sei K ein Körper

$$K^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in K, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

der Vektorraum der n -Tupel über K .

Satz. Die Vektoren e_1, e_2, \dots, e_n erzeugen den Raum K^n

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Standardraum K^n

Standardeinheitsvektoren

Beweis

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{\mu=1}^n x_\mu e_\mu$$

Somit gilt: $\text{Lin}(\{e_1, \dots, e_n\}) = K^n$