

Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra



Elementare Theorie der Vektorräume

Lineare Abbildungen
und
Matrizen

M.B. Wischnewsky

08. 07. 2007

Produkt von Vektorräumen

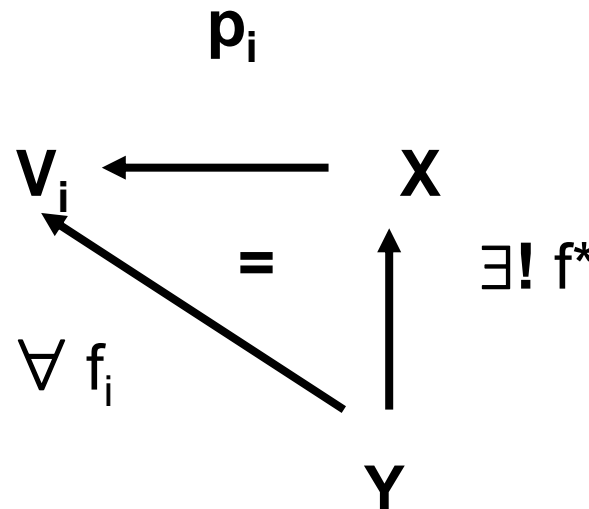
elementefreie Beschreibung

Sei $(V_i, i \in I)$ eine Familie von K -Vektorräumen.

Ein Vektorraum X zusammen mit einer Familie von linearen Abbildungen $p_i: X \rightarrow V_i$ heißt **Produkt** der $(V_i, i \in I)$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Vektorraum Y und jeder Familie von linearen Abbildungen $f_i: Y \rightarrow V_i$ existiert genau eine lineare Abbildung $f^*: Y \rightarrow X$ mit

$$p_i \circ f^* = f_i$$



Coprodukte* (=direkte Summen) von Vektorräumen

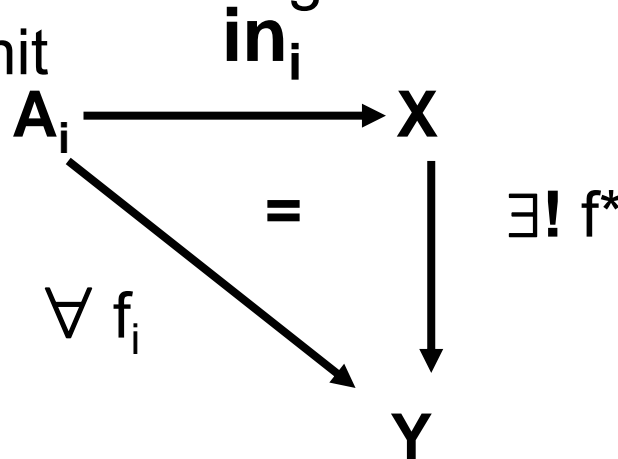
elementefreie Beschreibung

Sei $(A_i, i \in I)$ eine Familie von Vektorräumen über dem Körper K .

Ein Vektorraum X zusammen mit einer Familie von linearen Abbildungen $\text{in}_i: A_i \rightarrow X$ heißt **Coprodukt** oder **direkte Summe** der $(A_i, i \in I)$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Vektorraum Y und jeder Familie von linearen Abbildungen $f_i: A_i \rightarrow Y$ existiert genau eine lineare Abbildung $f^*: X \rightarrow Y$ mit

$$f^* \text{in}_i = f_i$$



* Der Begriff Coprodukt ist der duale Begriff zu Produkt (dual= alle Pfeile drehen sich um).

Lineare Algebra

Ausgangspunkt: Lösung linearer Gleichungssysteme

- Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Definition 0.1: Ein *lineares Gleichungssystem* in n Unbestimmten und in m Gleichungen ist:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \Lambda & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \Lambda & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \text{M} & & & & \text{M} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \Lambda & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Die a_{ij} sind die *Koeffizienten* aus \mathbb{R} . Die b_j sind weitere Zahlen, auch die *Konstanten genannt*, und die x_i sind die *Unbestimmten*, bzw. die Unbekannten, die Veränderlichen.

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \Lambda & + & a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \Lambda & + & a_{2n}x_n = b_2 \\
 & & & & \text{M} & & \text{M} \\
 a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \Lambda & + & a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}$$

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems werden zusammengefasst zu einer *Matrix*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \text{M} & & & \text{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A ist vom Typ mxn (m Zeilen, n Spalten)

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \text{M} & & \text{M} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Definition 0.2 Matrixoperation:

Eine Matrix A der obigen Form wirkt auf einen Spaltenvektor x auf die folgende Weise:

$$Ax := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n \\ \text{M} \text{M} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \text{M} \\ x_n \end{pmatrix}$$

dadurch wird eine Abbildung definiert

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \rightarrow Ax$$

\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m sind „Vektorräume“ und L_A ist eine „lineare“ Abbildung

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \Lambda & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \Lambda & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & & \text{M} & & \text{M} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \Lambda & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Mit dieser Notation hat das lineare Gleichungssystem aus 1.1 die Form:

$$Ax = b$$

Die in 1.2 eingeführte Matrixoperation liefert eine Abbildung

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \rightarrow Ax$$

Die Frage, ob $Ax = b$ eine Lösung hat, lässt sich daher auffassen, ob b in der Bildmenge $\text{Bi}(L_A) := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ von L_A vorkommt.

**Die lineare Algebra ist das Studium von
Vektorräumen und linearen Abbildungen**

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \Lambda & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \Lambda & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & & M & & M \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \Lambda & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Definition

1. $Ax = b$ heißt **homogen** wenn $b=0$
2. $Ax = b$ heißt **inhomogen** wenn $b \neq 0$
3. Zwei lineare Gleichungssysteme
 $Ax=b$ und $Bx=c$ für $x=(x_1, \dots, x_n)$
(nicht notwendiger mit derselben Anzahl
von Gleichungen) heißen **äquivalent**,
wenn sie die gleiche Lösungsmenge
besitzen.

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \text{M} \quad \quad \quad \text{M} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \text{M} \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad a_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \text{M} \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \text{M} \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \text{M} \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad \longleftrightarrow \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b \quad \longleftrightarrow$$

$$b \in \text{Lin}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \Lambda & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \Lambda & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & & M & & M \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \Lambda & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

- Ein nach C.F. Gauss (1777-1855) benanntes Lösungsverfahren beruht auf der Erkenntnis, dass ein Gleichungssystem $Ax=b$ durch folgende Umformungen in ein dazu äquivalentes übergeht:
 1. Vertauschung zweier Gleichungen.
 2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$.
 3. Addition (bzw. Subtraktion) des Vielfachen einer Gleichung zu (bzw. von) einer anderen.

Lineare Gleichungssysteme

elementare Zeilenumformungen

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \text{M} & & \text{M} \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda & + & a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 \text{M} & & & \text{M} & \text{M} \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n
 \end{array} \right)$$

1. Vertauschung zweier Zeilen.
2. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$.
3. Addition (bzw. Subtraktion) des Vielfachen einer Zeile zu (bzw. von) einer anderen.

Entsteht $(B|c)$ aus $(A|b)$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen, dann sind $Ax=b$ und $Bx=c$ äquivalent.

Bemerkung Nicht jedes LGS ist lösbar

(A) LGS besitzt keine Lösung

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 = 2$$

(B) LGS besitzt genau eine Lösung

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$3x_1 + x_2 = 5$$

$$\rangle x_1 = 3; x_2 = -4$$

(C) Das LGS besitzt unendl. viele Lösungen

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}(1 - 2\lambda)$$

$$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right)$$

1) $Ax = 0$ (homogenes System)

Lösung in 2 Schritten

(a) Vorwärtselimination (+ Zeilenstufenform)

(b) Rückwärtssubstitution

$$\textcircled{a} \quad Ax = b \Leftrightarrow (A|b)$$

sei $b = 0$; Mit Hilfe der elementaren Zeilenumformungen erhält man aus A die folgende Matrix

$$M = \left(\begin{array}{cccccc} \boxed{\times} & * & \circ & \circ & & * \\ 0 & 0 & \boxed{\times} & * & \dots & \times \\ | & | & 0 & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow 0 & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array}$$

Beispiel 1

$$M = \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

Allgem. Die zu den Spalten ohne \square -Stelle gehörenden Unbekannten sind die „freien“ Variablen. Sie werden der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$ bezeichnet

Es gilt $Ax=0 \Leftrightarrow Mx=0 \Leftrightarrow$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0$$

$$2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-x_4 + 3x_5 = 0$$

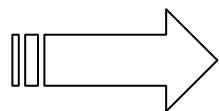
Mit $x_2 = \lambda_1$ und $x_5 = \lambda_2$ erhalten wir

$$x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$2x_3 + x_4 = 4\lambda_2$$

$$-x_4 = -3\lambda_2$$

$$x_4 = 3\lambda_2; \quad x_3 = \frac{1}{2}\lambda_2, \quad x_1 = 2\lambda_1 - 15.5\lambda_2$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 15,5\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0,5\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -15,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißt allgem. Lösung des homog. Systems

Für feste Werte λ_1 und λ_2 erhält man jeweils eine spezielle Lösung.

Beispiel: Für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man die Lösung $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

Beispiel 2

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-6} & 0 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$-6 \cdot x - 8 = 0$$

$$x = -\frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow A_2 = M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-6} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Bezeichnet man die Spalten der Matrix mit a_i

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad a_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Hiermit definiert die Matrix eine lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longrightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Hiermit gilt : $Ax=0$ genau dann wenn $x \in \text{Ker}(A)$

Beispiel 3) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0$$

$$3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$x_3 = \lambda_1$$

$$x_4 = \lambda_2$$

Hiermit erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}x_2 &= x_3 + x_4 = \lambda_1 + \lambda_2 \\x_1 &= 4x_2 - 2x_3 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2\end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist die allgemeine Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems.

Bemerkung. Gegeben $a_1, \dots, a_n \in K^m$. Dann gilt:

a_1, \dots, a_n sind linear unabhängig genau dann wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$ nur die triviale Lösung $x=0$ besitzt.

Def. Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen (also die Anzahl der ~~0~~-Stellen) in der mittels Gauss-Elimination erzielten Zeilenstufenmatrix M heißt Rang von A ($\text{Rang}(A)$).

Satz

- a) Das homogene Gleichungssystem $AX=0$ hat genau dann als einzige Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ wenn $\text{Rang}(A) = n$ (n Anzahl der Unbekannten)
- b) Die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems enthält $n - \text{Rang}(A)$ freie Variablen.
- c) Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ($m < n$), dann besitzt $AX=0$ von Null verschiedene Lösungen

Beweis

b) Es gibt $n - \text{Rang } A$ Spalten in Matrix M ohne \square -Stelle. Jede der zu diesen Spalten gehörenden Variablen ist "frei".

a) Aus b) folgt: $n - \text{Rang } A = n - n = 0 \Rightarrow$
Es gibt keine freie Variable
 \Rightarrow Rückwärtssubstitution
 $x_n = 0, x_{n-1} = 0, \dots, x_1 = 0$

c) $\text{Rang } A \leq m$ (trivial) und $m < n$
(Anzahl der Zeilen $<$ Anzahl der Unbekannten)

$$n - \text{Rang } A \geq n - m \geq 1$$

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline \text{Rang } A \quad m \quad n \end{array}$$

\Rightarrow Es gibt mindestens eine freie Variable

Sei o.E.d.A. $x_b = \lambda = 1$

$$x_1 = *, x_2 = *, \dots, x_b = 1, x_{b+2} = *, \dots, x_n = *$$

2) Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A x = b$$

Lösungsweg

(a) Vorwärtselimination an der erweiterten Matrix $(A | b)$

(b) Lösbarkeitsentscheidung.

(c) Rückwärtssubstitution.

(a)

$$(M | d) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{*} & * & & & * & & & \delta_1 \\ 0 & 0 & \boxed{*} & & & & & \vdots \\ | & 0 & 0 & & \boxed{*} & * & * & \delta_2 \\ | & | & | & & 0 & - & 0 & \delta_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & - & 0 & \delta_m \end{array} \right)$$