

Mathematik II für Informatiker

Grundlagen zur Linearen Algebra



**Elementare Theorie
der Vektorräume
Lineare
Gleichungssysteme,
Basen**

M.B. Wischnewsky
11. 05. 2007

Inhomogenes lineares Gleichungssystem

Gauss-Algorithmus

Lösungsweg

- (a) Vorwärtselimination an der erweiterten Matrix $(A|b)$
- (b) Lösbarkeitsentscheidung.
- (c) Rückwärtssubstitution.

(a)

$$(M|d) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} * & \text{---} & * & & d_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & & \vdots \\ | & 0 & 0 & \ddots & d_2 \\ | & | & | & \boxed{1} * * & d_{n+1} \\ & & & 0 \text{ --- } 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \text{ --- } 0 & d_m \end{array} \right)$$

Inhomogenes lineares Gleichungssystem

Gauss-Algorithmus

① Lösbarkeitsentscheidung

$Mx = d$ nicht lösbar (d.h. $Ax = b$ nicht lösbar) \Leftrightarrow wenn eine der Zahlen $\delta_{r+1}, \dots, \delta_m \neq 0$ ist.

o.E.d.A $\delta_{r+1} \neq 0$

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \delta_{r+1} \neq 0 \quad \nexists$$

$\forall m$ Fälle $\delta_{r+1} = \dots = \delta_m = 0$ berechnet man die Lösung

durch Rückwärtssubstitution !!

Satz.

a) Lösungskriterium

Das inhomogene Gleichungssystem $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A).$$

b) Struktur der Lösungsmenge

Ist $Ax=b$ lösbar, dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ mit einer speziellen Lösung \mathbf{v}_0 des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung \mathbf{u} des zugehörigen homogenen Systems $Ax=0$.

c) Dimension des Lösungsraumes (Anzahl der freien Variablen)

Ist $Ax=b$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung $(n - \text{Rang}(A))$ freie Variable.

Satz.

a) Lösungskriterium

Das inhomogene Gleichungssystem $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A).$$

Beweis

① $d_{r+1} = \dots = d_m = 0 \Rightarrow$ die durch A und $(A|b)$ erzeugten Zeilenstufenmatrizen besitzen die gleiche Anzahl von ~~0~~-Stellen.

Satz.

b) Struktur der Lösungsmenge

Ist $Ax=b$ lösbar, dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form $v = v_0 + u$ mit einer speziellen Lösung v_0 des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax=0$.
Beweis:

$$\begin{array}{c} Ax = b \\ \text{allgem. Lösung } v = v_0 + u \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{spez. Lösung} & \text{allgemeine} \\ \text{von } Ax = b & \text{Lösung von } Ax = 0 \end{array} \end{array}$$

Beweis

Vorbemerkung

①

$$A = (\alpha_{ij}) = (a_1, \dots, a_n) \quad a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$$

$$AX = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

$$x_i a_i = x_i \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \alpha_{1i} \\ \vdots \\ x_i \alpha_{mi} \end{pmatrix}$$

$$A: K^n \longrightarrow K^m \quad x \mapsto AX$$

linear

$$\text{z.z. } \forall x, y \in K^n \quad \forall \lambda \in K \quad \begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned}$$

$$A: K^n \longrightarrow K^n \quad x \mapsto Ax$$

linear

$$\forall x, y \in K^n \quad \forall \lambda \in K \quad \begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned}$$

$$1) \quad x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \Rightarrow A(x+y) = (x_1+y_1)a_1 + \dots + (x_n+y_n)a_n$$

$$= x_1a_1 + \dots + x_na_n + y_1a_1 + \dots + y_na_n = Ax + Ay$$

$$2) \quad A(\lambda x) = \lambda x_1a_1 + \dots + \lambda x_na_n = \lambda(x_1a_1 + \dots + x_na_n) = \lambda Ax \quad \square$$

Satz.

b) Struktur der Lösungsmenge

Ist $Ax=b$ lösbar, dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ mit einer speziellen Lösung \mathbf{v}_0 des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung \mathbf{u} des zugehörigen homogenen Systems $Ax=0$.

Beweis.

- 1) Sei \mathbf{v}_0 eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax=b$ und \mathbf{u} die allgemeine Lösung \mathbf{u} des zugehörigen homogenen Systems $Ax=0$.

Dann gilt: $A(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) = A(\mathbf{v}_0) + A(\mathbf{u}) = b + 0 = b$

- 2) Sei \mathbf{v} eine beliebige Lösung von $Ax=b$. Dann gilt:

$$A(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = A(\mathbf{v}) - A(\mathbf{v}_0) = b - b = 0 \rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in \text{Ker}(A) \rightarrow$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} \in \text{Ker}(A)$$

(w) Sei U ein Unterraum eines Vektorraumes V

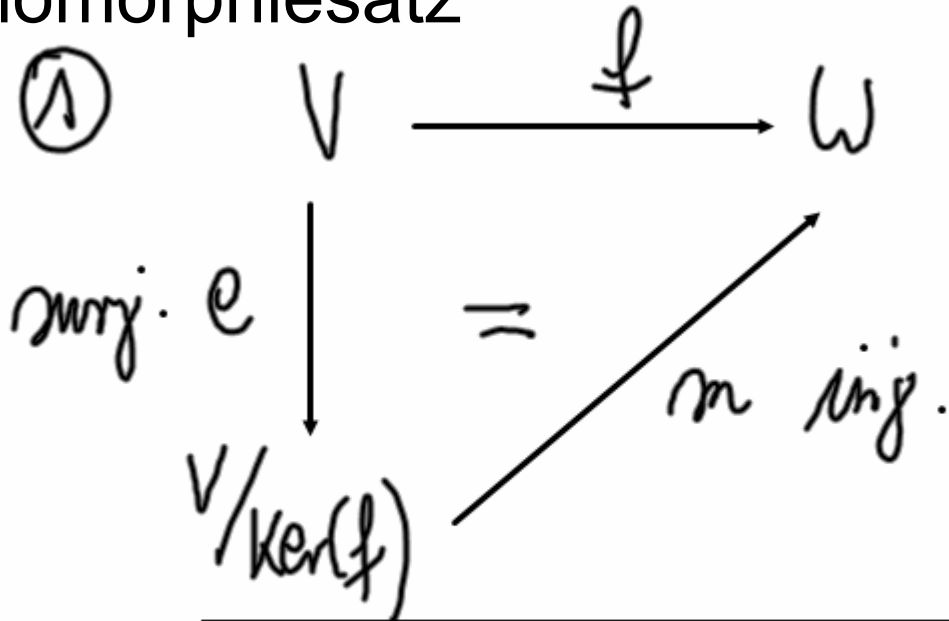
$$V/U = \{x+U; x \in V\}$$

$$x+U := \{x+u; u \in U\}$$

$$(x+U) + (y+U) := (x+y) + U$$

$$\lambda(x+U) := \lambda x + U$$

③ Homomorphiesatz



$$\textcircled{2} \quad V/\ker(f) \cong \text{Bi}(f)$$

Nun gilt:

$$v - v_0 \in \ker(A) \Rightarrow \exists_{u \in \ker(A)} v = v_0 + u \Rightarrow$$

$$\text{Menge aller L\u00f6sungen von } Ax=b \equiv v_0 + \ker(A) \quad \square$$

Satz

c) Dimension des Lösungsraumes (Anzahl der freien Variablen)

Ist $Ax=b$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung $(n-\text{Rang}(A))$ freie Variable.

Beweis

$\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A) \rightarrow Ax=b$ besitzt $(n-\text{Rang}(A))$ freie Variable (= freien Variablen des homogenen linearen Gleichungssystems).

Pseudocode zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Definition der rekursiven Fkt Gauss(i,j) mit Zeilen- und Spaltenindex als Parameter.

i=j=1.

Gauss(i,j):

falls i=Zeilenzahl oder j > Spaltenzahl:

Ende.

Falls $a_{ij} = 0$:

suche $a_{kj} \neq 0$, $k > i$, wenn es keines

gibt: Gauss(i,j+1), Ende.

vertausche Zeile k mit Zeile i

Ziehe für alle $k > i$ von der k-ten Zeile das (a_{kj}/a_{ij}) -fache der i-ten Zeile ab.

Gauss(i+1,j+1), Ende.

Lineare Gleichungssysteme

Beispiele

Physik	[Stromkreise],
Chemie	[Stöchiometrie],
Biologie	[lineare Populationsmodelle],
Vektorgeometrie	[Lageaufgaben, lineare Vektorgleichungen],
Wirtschaft	[Materialfluss, Wirtschaftsmodelle]).
Bauingenieurwissenschaften	[Fachwerkskonstruktionen]



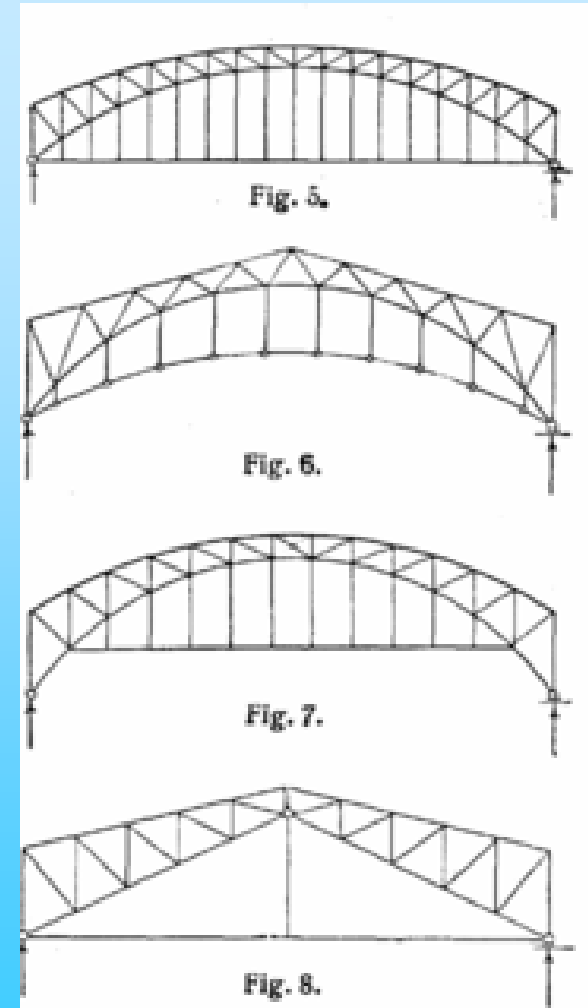
Fachwerkskonstruktionen

Als Fachwerk bezeichnet man nach den Zwischenräumen, die *Fach* oder *Gefach* heißen, **eine Konstruktion**, in der nur Stäbe auf Druck oder Zug und nicht auf Biegung beansprucht werden.

Der Ausdehnung nach unterscheiden wir ein **ebenes** und ein **räumliches Fachwerk**.

Fachwerke finden ihre Anwendung:

- im Gebäudebau – insbesondere als Fachwerkhaus und im Hallenbau; *siehe auch* Hochbau und Tiefbau.
- im Brückenbau.
- in Kran- und Mastenbau.
- im Gerüstbau
- im Maschinenbau
- in der Veranstaltungstechnik



Gleichgewichtsbedingungen für ein Fachwerk

Kräfte greifen nur in den Knoten an.

Druckkräfte in Stäben sind negativ, Zugkräfte positiv.

Gewichtskräfte des Fachwerks bleiben unberücksichtigt.

Die Belastungskräfte sind in Pfeilrichtung positiv zu zählen.

Gleichgewichtsbedingungen für ein Fachwerk

- 1) Die Summe aller auf einen Knoten wirkenden Kräfte ist Null.
- 2) Die Summe aller in einem Stab wirkenden Kräfte ist Null.

Knotenpunktverfahren

Mit dem **Knotenpunktverfahren** lassen sich die Stabkräfte durch Aufstellen eines Gleichungssystems ermitteln.

Für jeden Knoten werden die folgenden zwei Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt:

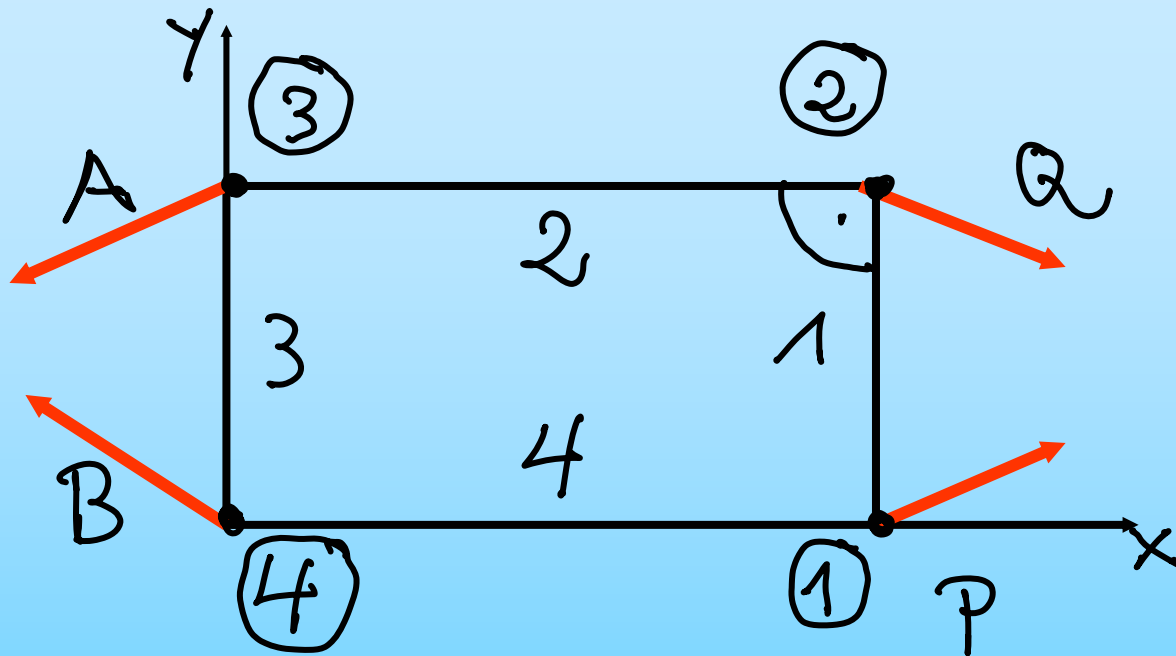
- **Die Summe der Kräfte in x- und in y-Richtung muss Null sein**

Dadurch ergibt sich ein Gleichungssystem, das bei statischer Bestimmtheit des Fachwerks gelöst werden kann.

Im dreidimensionalen Fall werden jeweils drei Gleichungen aufgestellt.

Bei einfachen Fachwerken genügt es, die Auflagerkräfte mit dem Erstarrungsprinzip zu berechnen und sich dann entlang der Knoten 'durchzuhangeln'

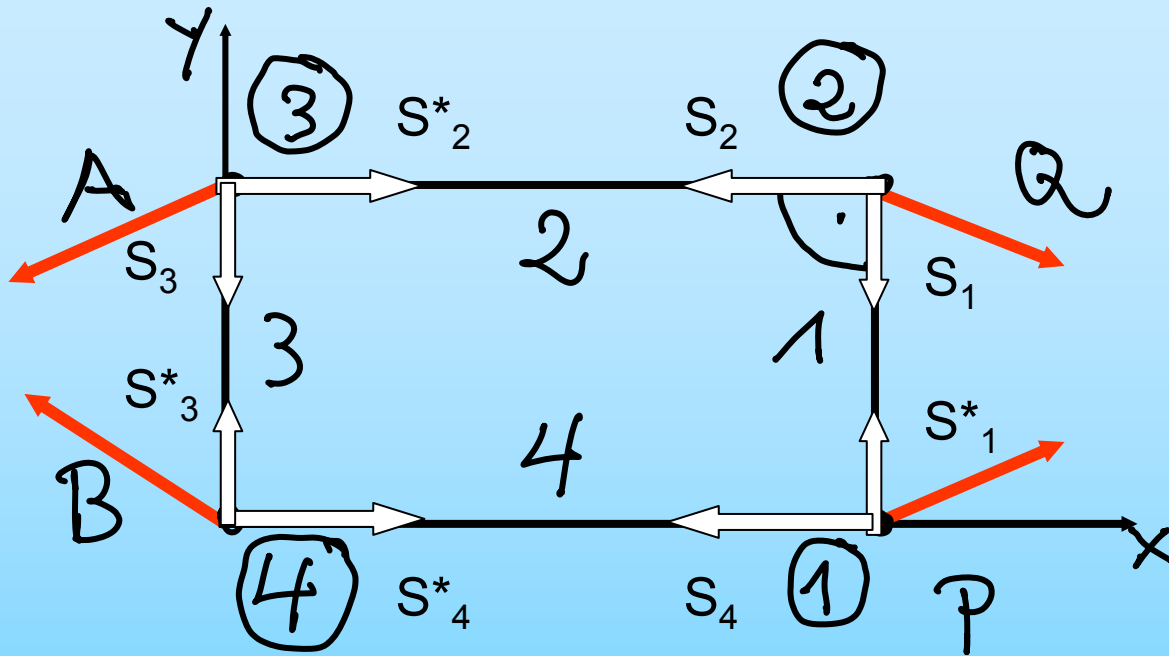
Beispiel: Ebenes Fachwerk (1)



Auf das skizzierte ebene Fachwerk mit 4 Stäben und 4 Knoten wirken 2 Kräfte P und Q. Sie rufen in jedem Stabende eine Reaktion in Richtung des Stabes hervor.

In den festen Auflagern 3 und 4 sind A und B die Reaktionen

Beispiel: Ebenes Fachwerk (2)



$S_i^* = -S_i$,
da die Summe
der Kräfte in
einem Stab Null
ist

Knoten 1: $x: s_4 + P_x = 0$
 $y: -s_1 + P_y = 0$

Knoten 3: $x: -s_2 + A_x = 0$
 $y: s_3 + A_y = 0$

Knoten 2: $x: s_2 + Q_x = 0$
 $y: s_1 + Q_y = 0$

Knoten 4: $x: -s_4 + B_x = 0$
 $y: -s_3 + B_y = 0$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes

d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem unbekannten Vektor $x=(S_1, S_2, S_3, S_4, A_x, A_y, B_x, B_y)$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes

Gauss-Elimination liefert

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_y \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_x \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -Q_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -P_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_y + Q_y \end{array} \right)$$

→ Rang (A) = 7

Fachwerk

Fall1: $P_y + Q_y \neq 0 \rightarrow$ keine Lösung: Stabwerk kinematisch unbestimmt.

Fall2: $P_y + Q_y = 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b)$.

Das Stabwerk ist statisch unbestimmt!

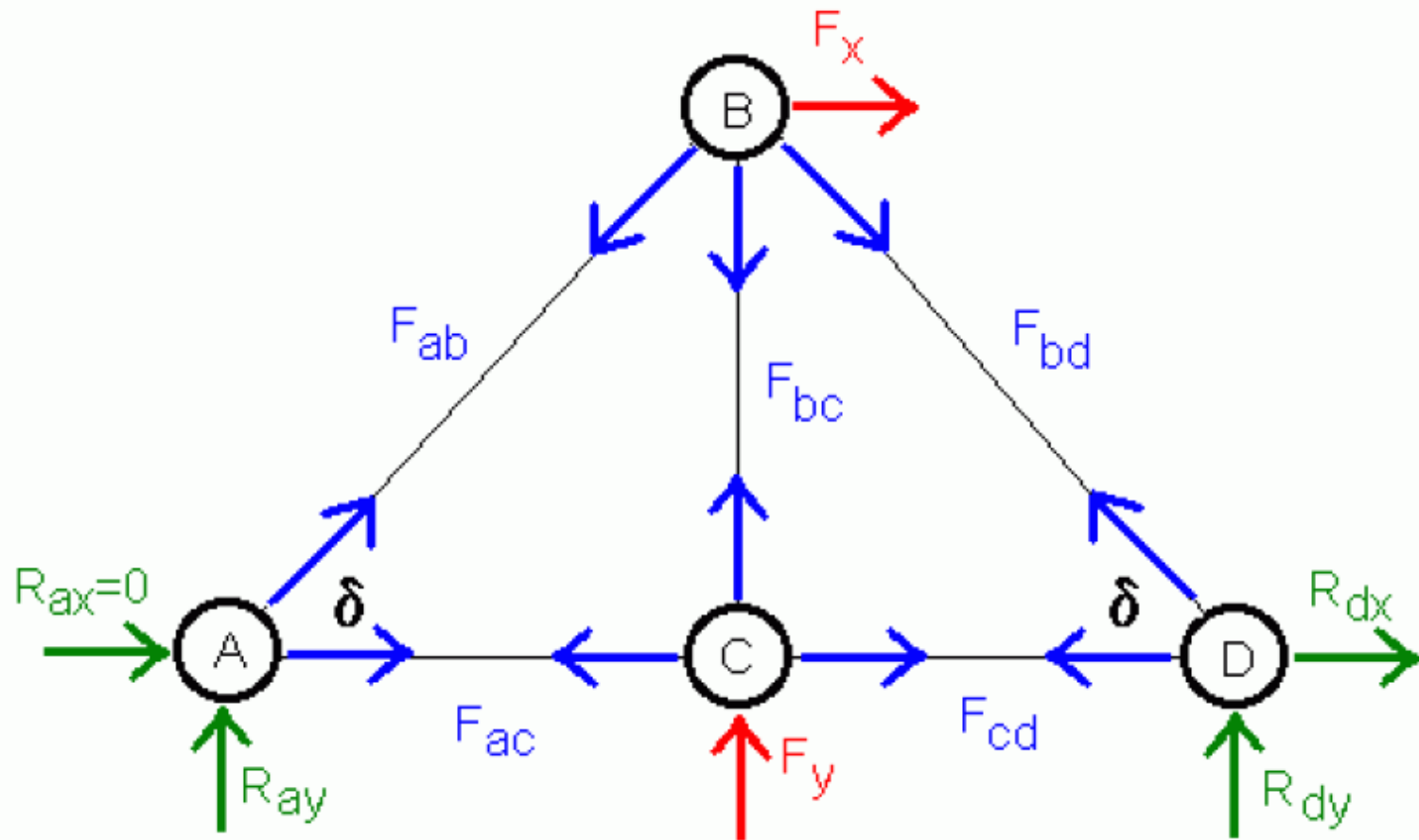
$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_x \\ 0 \\ -P_x \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ -Q_x \\ 0 \\ P_x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A_x, B_x, S_1, S_2 und S_4 sind eindeutig bestimmt.

S_3 und A_y können aus P und Q nicht eindeutig bestimmt werden.

Beispiel: Ebenes Fachwerk (2)

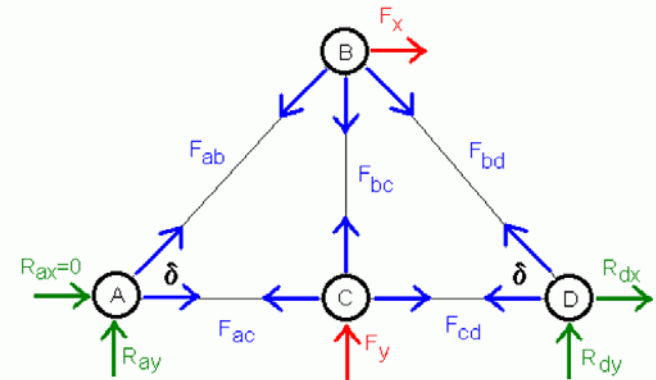
Fachwerk



Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes

Fachwerk

Knoten A: $x: F_{ab} \cdot \cos(\delta) + F_{ac} = 0$
 $y: F_{ab} \cdot \sin(\delta) + R_{ay} = 0$

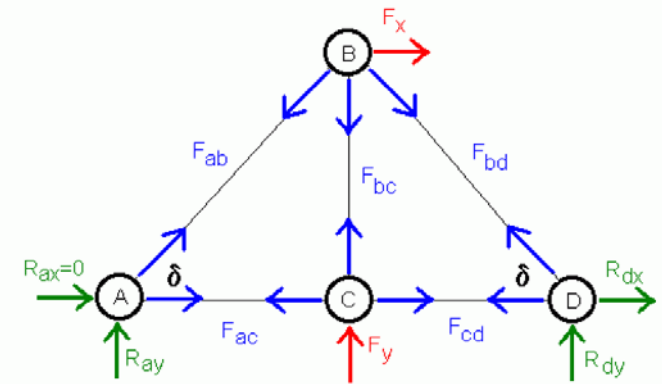


Knoten B: $x: -F_{ab} \cdot \cos(\delta) + F_{bd} \cdot \cos(\delta) = -F_x$
 $y: -F_{ab} \cdot \sin(\delta) - F_{bc} - F_{bd} \cdot \sin(\delta) = 0$

Knoten C: $x: -F_{ac} + F_{cd} = 0$
 $y: F_{bc} = -F_y$

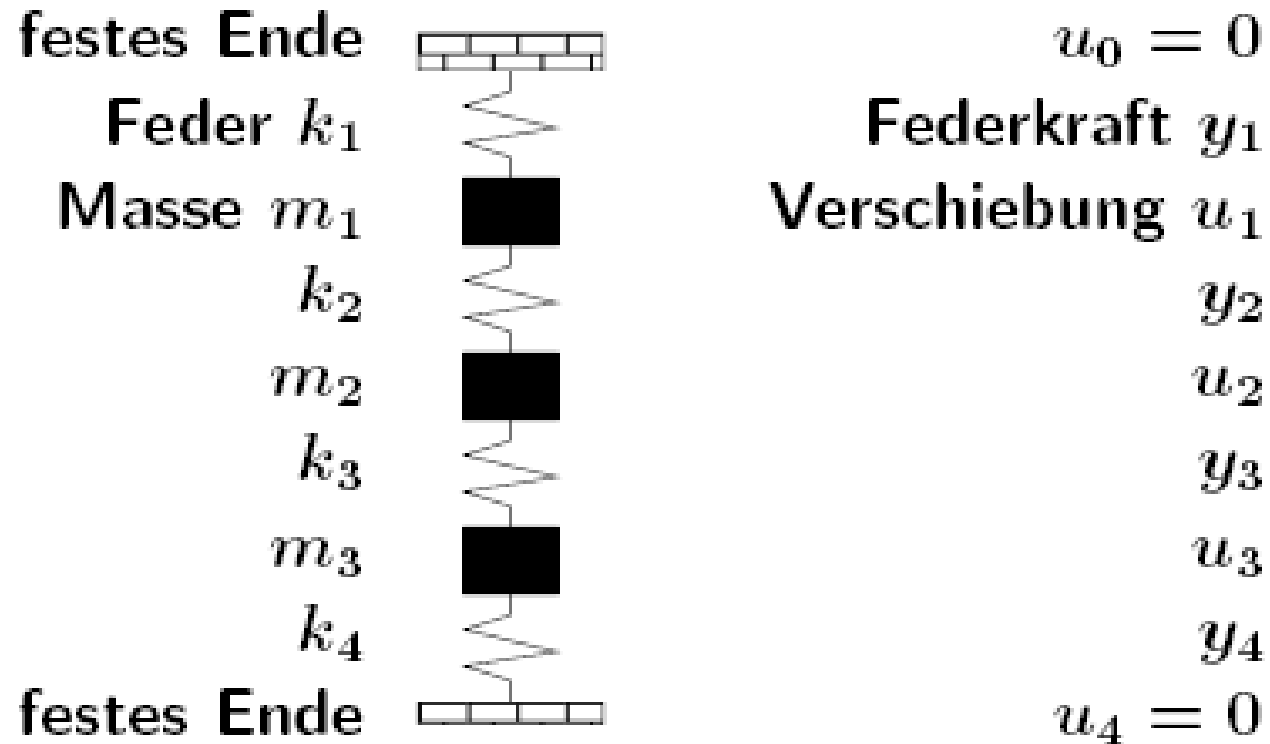
Knoten D: $x: -F_{cd} - F_{bd} \cdot \cos(\delta) + R_{dx} = 0$
 $y: F_{bd} \cdot \sin(\delta) + R_{dy} = 0$

Lineares Gleichungssystem zur Berechnung des Fachwerkes



$$\begin{pmatrix}
 \cos(\delta) & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos(\delta) & 0 & 0 & \cos(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_x \\
 -\sin(\delta) & 0 & -1 & -\sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F_y \\
 0 & 0 & 0 & -\cos(\delta) & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin(\delta) & 0 & 0 & 0 & +1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Feder-Masse-System



Beispiel: Feder-Masse-System

Bezeichnungen

$u = (u_1; u_2; u_3)$ = Verschiebungen der Massen

$y = (y_1; y_2; y_3; y_4)$ = Kräfte in den Federn

$e = (e_1; e_2; e_3; e_4)$ = Ausdehnungen der Federn

$f = (f_1; f_2; f_3)$ = Gravitationskräfte

Aufstellen der Gesetze

Ausdehnung der Feder = Differenz der Verschiebungen

Hookesches Gesetz

Kräftegleichgewicht

Beispiel: Feder-Masse-System

Ausdehnung der Feder = Differenz der Verschiebungen

Erste Feder: $e_1 = u_1$ da $u_0 = 0$

Zweite Feder: $e_2 = u_2 - u_1$

Dritte Feder: $e_3 = u_3 - u_2$

Vierte Feder: $e_4 = -u_3$ da $u_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

oder kurz: $e = A(u)$

Beispiel: Feder-Masse-System

Hookesches Gesetz

Die Verlängerung e einer Feder ist proportional zur wirkenden Kraft y .

$$y \sim e$$

oder:

$$y = k \cdot e$$

k = Federkonstante

Erste Feder:

$$y_1 = k_1 e_1$$

Zweite Feder:

$$y_2 = k_2 e_2$$

Dritte Feder:

$$y_3 = k_3 e_3$$

Vierte Feder:

$$y_4 = k_4 e_4$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder kurz: } y = K(e)$$

Beispiel: Feder-Masse-System

Kräftegleichgewicht: äussere Kräfte = innere Kräfte

Erste Masse: $f_1 = y_1 - y_2 = m_1 g$

Zweite Masse: $f_2 = y_2 - y_3 = m_2 g$

Dritte Masse: $f_3 = y_3 - y_4 = m_3 g$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

oder kurz: $f = A(y)$

Def. Begriff Basis

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraumes $V \neq \{0\}$ über K nennt man eine Basis von V , wenn gilt:

(B1) B ist ein Erzeugendensystem von V

$$\text{d.h. } \forall \exists \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$$

$x \in V \quad b_1, \dots, b_n \in B$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

(B2) B ist linear unabhängig

$$\text{d.h. } \forall b_1, \dots, b_n \in B \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

$i=1, \dots, n$

(b) Jeder endl. erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

$0 \neq a \in V \Rightarrow a$ linear unabhängig

\Rightarrow Es gibt u_1, \dots, u_k

$B = \{a, u_1, \dots, u_k\}$ Basis.

(c) Basislänge = Anzahl der Elemente einer Basis.

Fundamentalsatz \Rightarrow

Ist $B \subseteq V$ Basis u. $|B| = n$, dann

sind je $n+1$ Vektoren aus V linear abhängig

Sei $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine weitere Basis von V . \Rightarrow

$$|C| = m \leq n$$

Rollentausch: $|B| = n \leq m$ $\left. \begin{array}{l} |C| = m \leq n \\ |B| = n \leq m \end{array} \right\} |B| = |C|$

Dimension von V : $\dim_k V := |B|$
Basis

Bildergeschichte

1. Erzeugendensystem = Team von Bauarbeitern das den ganzen Vektorraum nachbauen könnte.
2. Zu viele Bauarbeiter treten sich auf die Füße.
(linear abhängig)
3. Basis =
 - (i) optimal eingespieltes Team von Bauarbeitern.
 - (ii) Keiner kann dazu genommen werden ohne dass es ineffektiv wird.
 - (iii) Alles funktioniert am Schnürchen denn in jeder Situation weiß jeder was er zu tun hat.

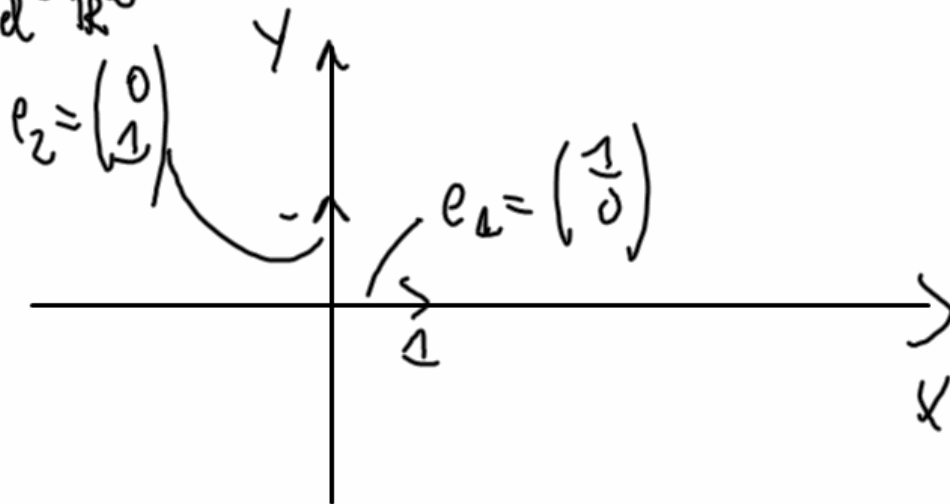
1) K^n ; $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $i = 1, \dots, n$
 \leftarrow i-te Stelle; Dann gilt

$$K^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i = 0$$

Folgerung $\dim K^n = n$ und $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von K^n .

Beispiel \mathbb{R}^2



Beisp.

1) $V = K^n$

$$\dim K^n = n$$

2) $V = P_n = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i; \alpha_i \in K \right\}$

$$B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ Basis des } P_n$$

$$\dim P_n = n + 1.$$

Bemerkung
(Beweis
15.4.07)

geg $f: V \rightarrow W$ $x \mapsto f(x)$ linear, d.h.

$$17) \quad \forall x, y \in V \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(2) $\bigvee_{x \in V} \bigwedge_{\lambda \in K} f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(b_i)$$

Satz. geg Vektorraum V über K u.
 $B \subseteq V$ Basis.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\subseteq} & V \\ & \searrow & \downarrow \exists! f^* \text{ linear} \\ & & W \end{array}$$

Jede Abbildung $f: B \rightarrow W$ in einen Vektorraum W lässt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung $f^*: V \rightarrow W$ fortsetzen.