

Mathematik 2 für Informatiker



Matrizen und Lineare Abbildungen

22.05.2007

M. B. Wischnewsky,

Hauptsatz V VR über Körper K (W)
 B Basis von V

$$\begin{array}{ccc} B & \hookrightarrow & V \\ & \searrow & \downarrow f^* \\ A & & W \end{array} \quad f^* \text{ lineare Abbildung.}$$

$$V \ni x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \Rightarrow f^*(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$$

Bemerkung. Freie Objekte

1) Gruppen Grp.

Def. Eine Gruppe G zusammen mit einer Abbildung
 $i: X \rightarrow G$, X Menge, heißt freie Gruppe über X \Leftrightarrow def.

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & G \\ & \searrow & \downarrow f^* \\ A & & G \end{array} \quad f^* \text{ Gruppenhomomorphismus.}$$

$$f^* \cdot i = f.$$

2) Jeder Vektorraum ist frei, d.h.

Zu jedem VR V gibt es eine Menge X (Basis von V) mit folgender Eigenschaft



Zu jedem Vektorraum W und jeder Abbildung $f: X \rightarrow W$ gibt es genau eine Lineare Abbildung $f^*: V \rightarrow W$, so dass $f^* i = f$

3) \mathbb{Z} ist frei über $X = \{1\}$

Sei $f(1) := g$

$$X = \{1\} \xrightarrow{1 \mapsto 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\exists! f^*} G$$

$\Rightarrow f^*(r) := g^r, r \in \mathbb{Z} \quad \forall f$
 ist ein Gruppenhomomorphismus $f^*: \mathbb{Z} \rightarrow G$

4) Universelle Eigenschaft: Standardkonzept der Mathematik

Beispiel: Definition von Produkten von Vektorräumen

Zu jedem Vektor. W u. jeder Familie von linearen Abbildungen $f_i: W \rightarrow V_i$ existiert genau eine lineare Abb. $f^*: W \rightarrow V_1 \times \dots \times V_n$

mit $p_i \cdot f^* = f_i$ für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xleftarrow[p_i]{p_i} & V_1 \times \dots \times V_n \\ & \searrow f_i & \uparrow f^* \\ & & W \end{array}$$

$p_i \equiv i\text{-te Projektion}$

Satz $\dim_K V = n \Leftrightarrow V \cong K^n$ (W)

Beisp 1) $P_n[X] = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i; \alpha_i \in K \right\}$
 $\dim P_n[X] = n+1$, da $B = \{1, x, \dots, x^n\}$
 Basis von $P_n[X]$
 $\Rightarrow P_n[X] \cong K^{n+1}$

2) $P[X] := \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i; n \in \mathbb{N}; \alpha_i \in K \right\}$,
 der Ring aller Polynome
 ist unendlich dimensional.

Lineare Abbildungen u. Matrizen

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 h_B \downarrow & = & \downarrow h_C \\
 K^n & \xrightarrow{A_{f,B,C}} & K^m
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 h_B: V \xrightarrow{\sim} K^n \\
 x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \\
 h_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}
 \end{array}$$

index!

$$f(b_i) = \alpha_{1i} c_1 + \dots + \alpha_{mi} c_m$$

$$A_{f,B,C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1i} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mi} & \alpha_{mn} \\ a_1 & a_i & a_n \end{pmatrix}$$

Nach Hauptsatz gilt ($B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V)

$$A_{f,B,C} \circ h_B = h_C \circ f \iff$$

$$\forall_{i=1, \dots, n} A_{f,B,C} \circ h_B(b_i) = h_C \circ f(b_i)$$

Matrizen und lineare Abbildungen

$$\uparrow) A_{f,B,C} \circ h_B(b_i)$$

$$x=b_i \Rightarrow h_B(b_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te}$$

$$\Rightarrow A_{f,B,C} \circ h_B(b_i) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i$$

Bemerkung
allgem. $A = (a_1, \dots, a_n) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A(x) = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

$$2) \quad h_C \circ f(h_i) = h_C \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k \right)$$

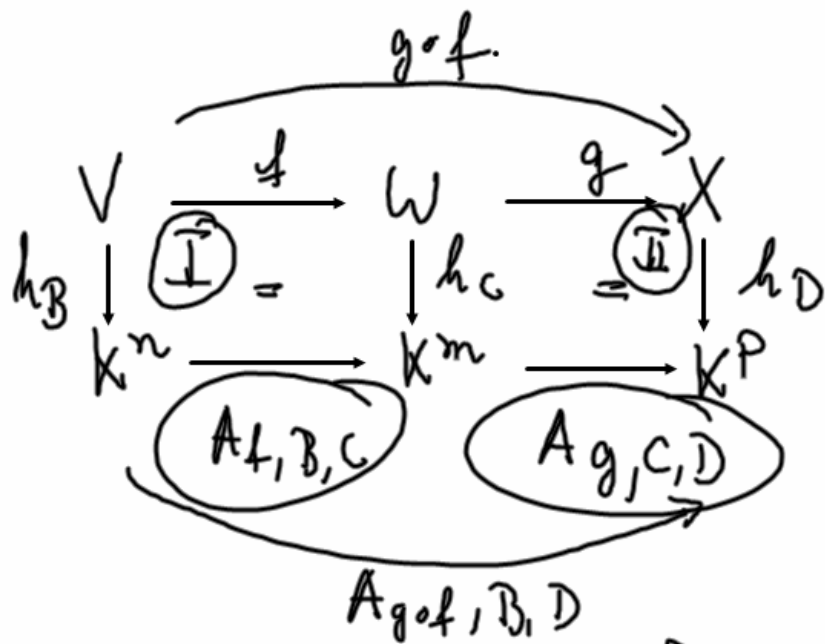
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} = a_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1i}c_1 + \dots + \alpha_{mi}c_m$$

$$A_{f,B,C} \circ h_B = h_C \circ f.$$

Satz

$$\begin{aligned} A_{f,B,C} &= h_C \circ f \circ h_B^{-1} \\ f &= h_C^{-1} \circ A_{f,B,C} \circ h_B \end{aligned}$$

Matrizen und lineare Abbildungen



$$x \in V \quad g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Bemerk. \textcircled{I} $A_{f, B, C} \circ h_B(h_i) = a_i$
 mit $A_{f, B, C} = (a_1, \dots, a_m)$

$$\Rightarrow A_{g, C, D} \circ A_{f, B, C} h_B(h_i) =$$

$A_{g, C, D} a_i = A_{g, C, D} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

Matrizen und lineare Abbildungen

$$\textcircled{1} \quad A_{g \circ f, B, D} \cdot h_B = h_D \cdot (g \circ f)$$

$$\Rightarrow A_{g \circ f, B, D} = h_D \cdot (g \circ f) \cdot h_B^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad A_{f, B, C} \cdot h_B = h_C \cdot f$$

$$A_{g, C, D} \cdot h_C = h_D \cdot g$$

$$A_{f, B, C} = h_C \cdot f \cdot h_B^{-1}$$

$$A_{g, C, D} = h_D \cdot g \cdot h_C^{-1}$$

$$A_{g, C, D} \cdot A_{f, B, C} = (h_D \cdot g \cdot h_C^{-1}) \cdot (h_C \cdot f \cdot h_B^{-1})$$

$$= h_D \cdot g \cdot (\underbrace{h_C^{-1} \cdot h_C}_{\text{id.}}) \cdot f \cdot h_B^{-1} =$$

$$h_D \cdot (g \circ f) \cdot h_B^{-1}$$

$$\Rightarrow A_{g \circ f, B, D} = A_{g, C, D} \cdot A_{f, B, C}$$

Matrizenmultiplikation "Zeile mal Spalte"

Berechnung von $A_{g \circ f, B, D}$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } A_{g \circ f, B, D} \cdot h_B(h_i) &= \\ A_{g, C, D} \cdot A_{f, B, C} h_B(h_i) &= \\ = (h_1, \dots, h_m)(a_i) &= \\ = \boxed{\alpha_{1i} h_1 + \dots + \alpha_{mi} h_m} \end{aligned}$$

Sei nun

$$A_{f, B, C} = A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ u. } A_{g, C, D} = B = \begin{pmatrix} \beta_{p1} & \dots & \beta_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{r1} & & \beta_{rm} \end{pmatrix}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
 A_{g,C,D} \cdot A_{A,B,C} h_B(h_j) &= \\
 B \cdot A h_B(h_j) &= \\
 = B a_j &= B \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & & \beta_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} &=
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{1j} + \beta_{12}\alpha_{2j} + \dots + \beta_{1m}\alpha_{mj} \\ \beta_{21}\alpha_{1j} + \beta_{22}\alpha_{2j} + \dots + \beta_{2m}\alpha_{mj} \\ \vdots \\ \beta_{p1}\alpha_{1j} + \beta_{p2}\alpha_{2j} + \dots + \beta_{pm}\alpha_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}$$

hieraus folgt

Matrizen und lineare Abbildungen

$$K^n \xrightarrow{A} K^m \xrightarrow{B} K^p$$

A, B Matrizen

$$C = BA$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & (\alpha_{1j}) & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & (\alpha_{mj}) & \alpha_{mn} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pm} \end{array}$$

$$C_{ij} = \left. \begin{array}{l} \beta_{i1} \cdot \alpha_{1j} + \\ \beta_{i2} \cdot \alpha_{2j} + \\ \vdots \\ \beta_{im} \cdot \alpha_{mj} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \alpha_{kj}$$

Schreibweise

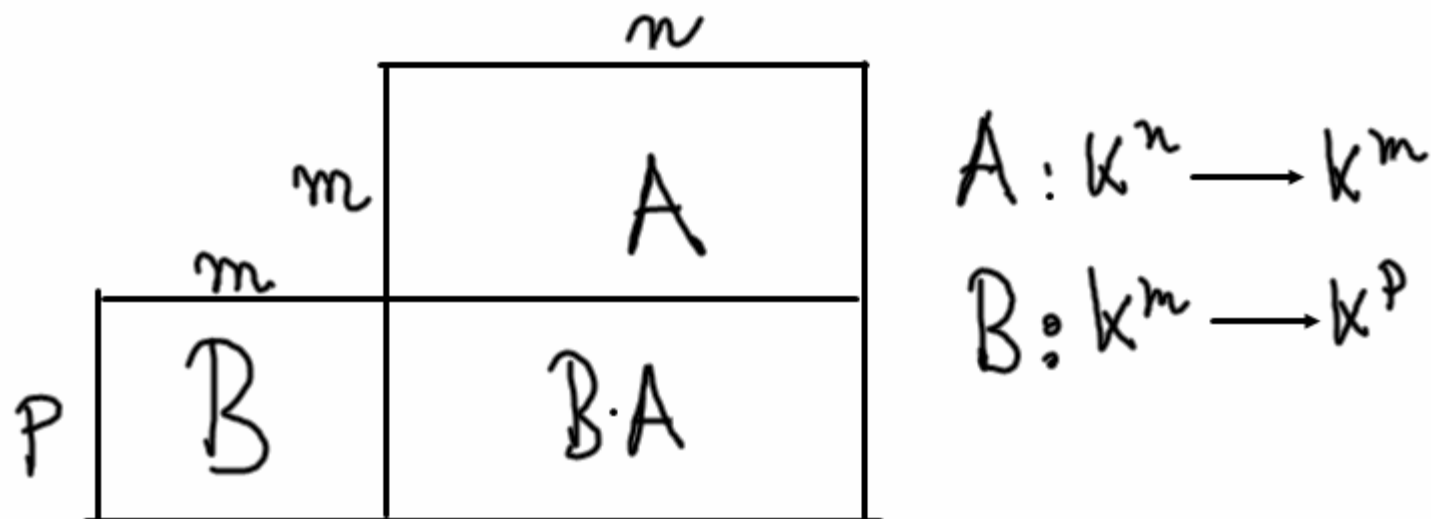
Zeilenvektor $\alpha := (\beta_1, \dots, \beta_n)$

Spaltenvektor $\beta := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Zeile mal Spalte

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \beta_1 \alpha_1 + \dots + \beta_n \alpha_n = \alpha \cdot \beta$$

„Zeile mal Spalte“



	$S_1 \dots$	$S_j \dots$	S_n
Z_1	$Z_1 S_1$	\dots	$Z_1 S_n$
Z_i		$Z_i S_j$	
Z_p	$Z_p S_1$		$Z_p S_n$

Bemerkungen

$$1) \text{ Sei } A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{1 \times n}$$

$$\Rightarrow A: K^n \longrightarrow K$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n = Z \cdot X.$$

$$2) \quad Ax = b \quad A = (a_1, \dots, a_n)$$

$$Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline & \begin{matrix} z_1 x_1 \\ \vdots \\ z_m x_n \end{matrix} \end{array}$$

$$z_{11}x_1 + \dots + z_{1n}x_n = z_1 \cdot x$$

$$z_{m1}x_1 + \dots + z_{mn}x_n = z_m \cdot x.$$

① Die Transponierte einer Matrix
 $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & & \textcircled{n} \end{matrix}$

$$A^T := \begin{pmatrix} \boxed{\alpha_{11} \ \alpha_{21} \ \dots \ \alpha_{m1}} \\ \boxed{\alpha_{12} \ \alpha_{22} \ \dots \ \alpha_{m2}} \\ \boxed{\alpha_{1n} \ \alpha_{2n} \ \dots \ \alpha_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textcircled{1} \\ \leftarrow \textcircled{2} \\ \leftarrow \textcircled{n} \end{matrix}$$

Rechenregeln für Transponierte

Bemerk.

$$A = (\alpha_{ij}) \in K^{m \times n}$$

$$B = (\beta_{ij}) \in K^{m \times n}$$

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$$

Folgy. $K^{m \times n}$ ist Vektorraum über K .

Def. $\text{Lin}(V, W) \equiv$ Menge aller linearen
Abb. $f: V \rightarrow W$.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Folgy. $\text{Lin}(V, W)$ ist Vektorraum über K .

Rechenregeln für transponierte Matrizen

$$a) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$b) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$c) (A^T)^T = A$$

$$d) (A \cdot B)^T = B^T A^T$$