

Spezialfälle

① Transponierte Matrix A^T

② Einheitsmatrix

$$E = (e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te}$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$

③ Matrix $A \in K^{n \times n}$; $A: K^n \longrightarrow K^n$

A invertierbar $\Leftrightarrow_{\text{def.}}$ $\exists B \in K^{n \times n}$ mit
 $AB = BA = E$

Bemerkung B eindeutig

Beweis Sei $C \in K^{n \times n}$ mit $AC = CA = E$

$$B = E \cdot B = (CA)B = C(AB) = CE = C$$

Inverse zu A : A^{-1}

Satz $A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar \Leftrightarrow
Die Spalten von A sind linear unabhängig

Beweis
Bemerk.

- $A \in K^{n \times n}$ $Ax = b$; Äquivalent
- ① $Ax = b$ ist für jede rechte Seite b lösbar
 - ② $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar
 - ③ $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar.

$Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar $\Leftrightarrow A$ ist invertierbar

(A ist surjektiv + injektiv)

$\Leftrightarrow Ax = 0$ ist eindeutig lösbar.

$$\Leftrightarrow Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$\Leftrightarrow A = (a_1, \dots, a_n)$ Spalten sind linear unabhängig

$GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n}; A \text{ ist invertierbar}\}$
"allgemeine lineare Gruppe"

Quotientenräume

Satz Jeder Unterraum eines endl. dim. Vektorraumes V ist endl. dim. n .
 im Falle $U \neq V$ gilt $\dim U < \dim V$.

Beweis Sei $U \neq \{0\}$ n
 $\{u_1, \dots, u_r\}$ sei ein System mit
 größt möglicher Anzahl linear unabhängiger
 Vektoren. Es gilt $r \leq n$ (falls $\dim V = n$)
 da u_1, \dots, u_r auch in V linear unabhängig.
 Sei $u \in U$ beliebig $\Rightarrow u_1, \dots, u_r, u$ linear
 $u \neq 0$ abhängig

$\Rightarrow u_1, \dots, u_r$ Erzeugendensyst. von U .

$$\left(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \lambda u = 0 \right) \quad \left(\begin{array}{l} \{u_1, \dots, u_r\} \\ \text{Basis} \\ \text{von } U. \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow u = -\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i$$

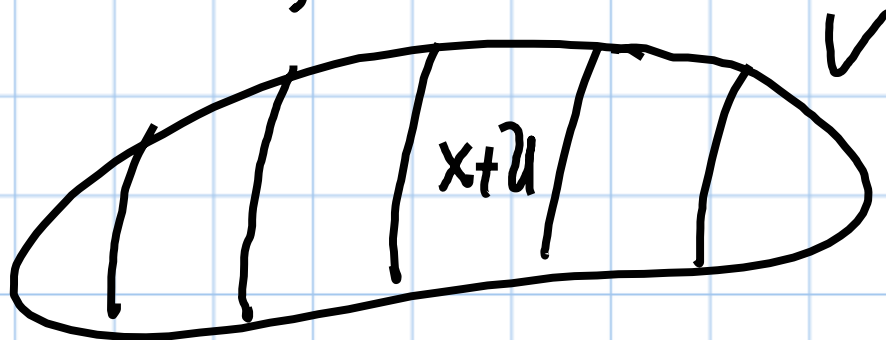
V endl. dim. V über K ; $U \subseteq V$ Unterraum.

$$V/U = \{x+U; x \in V\}$$

$$x+U := \{x+u; u \in U\}$$

$$(x+U) + (y+U) := (x+y) + U$$

$$\lambda(x+U) = \lambda x + U$$



Satz V endl. dim; $U \subseteq V$ Unterraum.

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Beweis. Sei $f: V \rightarrow W$ lineare Abb.

$$\textcircled{1} \quad \dim V = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Bi}(f)$$

$\textcircled{2}$ Homomorphiesatz:

$$V / \ker(f) \cong \operatorname{Bi}(f)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \quad \dim V / \ker(f) = \dim \operatorname{Bi}(f) = \dim V - \dim \ker(f)$$

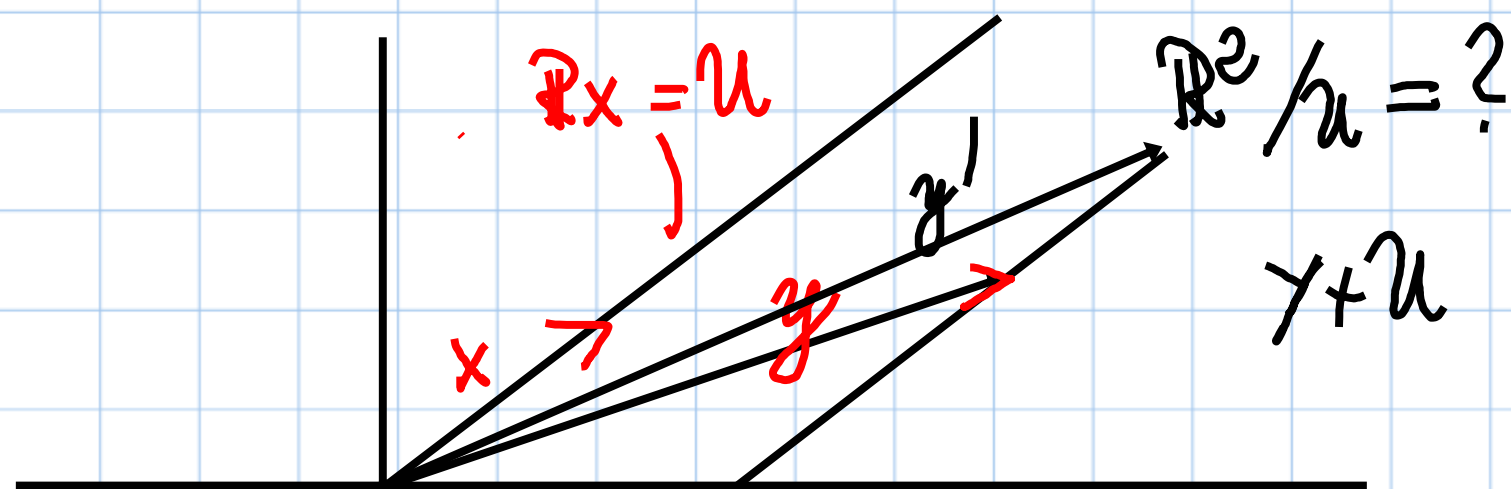
$$\textcircled{4} \quad \text{kan. Surjektion } e: V \rightarrow V/U$$
$$x \mapsto e(x) = x + U$$

$$\text{Null in } V/U: U = 0 + U$$

$$(x + U) + (0 + U) = (x + 0) + U = x + U$$

$$\ker(e) = U = \{x \in V; e(x) = U\}$$
$$= \{x \in V; x \in U\}$$

$$\Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U.$$

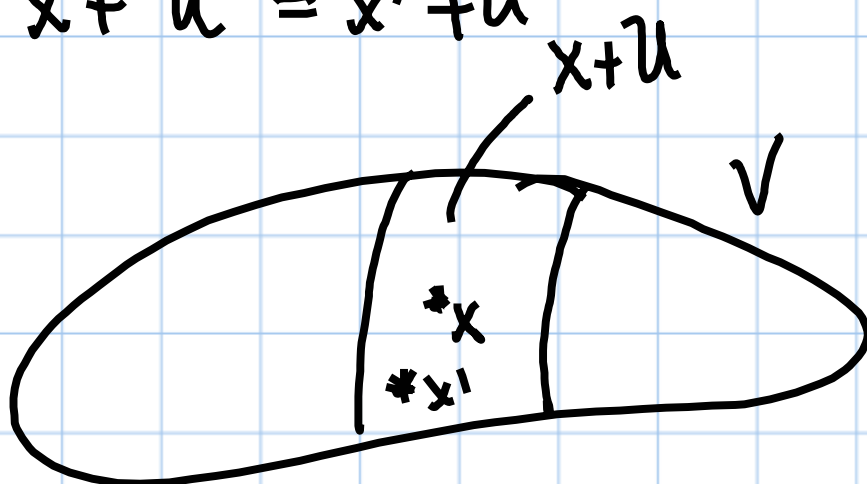


$$\lambda_1 x + \lambda_2 x = (\lambda_1 + \lambda_2) x$$

$$\lambda (\lambda_1 x) = (\lambda \lambda_1) x$$

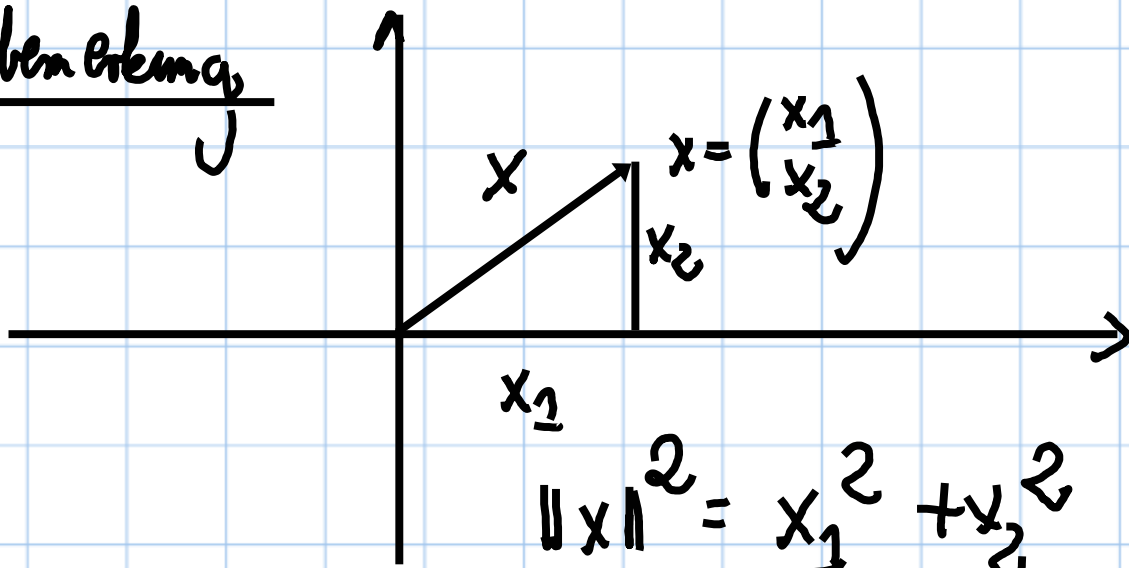
$\mathbb{R}^2 / u \equiv$ Menge aller par. Geraden zu u

Bem. $x + u = x' + u$



Euklidische Vektorräume

Vorbemerkung



$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$\|x\| \equiv$ Länge von x .

$$\mathbb{R}^n; \quad \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x, y) = x \cdot y = x^T \cdot y \quad \text{falls } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|x\|^2 = \sigma(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)}$$

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R}

$$\text{Def. } \sigma: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sigma(x, y)$$

heißt positiv definite, symmetrische

Bilinearform \Leftrightarrow

$$\textcircled{1} \quad \forall_{x \in V} \quad \sigma(x, x) \geq 0 \text{ u. } (\sigma(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$$

$$\textcircled{2} \quad \forall_{x, y \in V} \quad \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$

$$\textcircled{3} \quad \sigma(x, y) \text{ ist linear in jedem Argument.}$$

$$\sigma(x, -): V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear bzw.}$$

$$\sigma(-, y): V \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{''}$$

(V, σ) endl. Vektorraum.

Beisp.

$$1) \quad V = \mathbb{R}^n \quad \sigma(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

(\mathbb{R}^n, σ) Eukl.

$$2) \quad V = C_0(\bar{I}, \mathbb{R}) \quad \text{Vektor. der stetigen Fkt. } f: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ Interv.}$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$$\sigma(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Def. Sei (V, σ) endl. Vektorraum.

Dann heißt $\|x\| := \sqrt{\sigma(x, x)}$ heißt

die Länge von x

Beisp. 1) $f \in C_0(I, \mathbb{R})$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

$$2) x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Lemma $(V, \|\cdot\|)$ Eukl. Dann gelten

- ① $\|x\| \geq 0$ u. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ③ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerk. Normierte Vektorräume

Def Sei V VR über \mathbb{R} u.

$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ Dann heißt

$(V, \|\cdot\|)$ normierter VR \Leftrightarrow

- ① $\|x\| \geq 0$ u. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ② $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ③ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.