

(V, σ) Enkl. VR.

$$\sigma: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\sigma(x, y)$ positiv def., sym. Bilinearform.

$$\textcircled{1} \quad \forall_{x \in V} \quad \sigma(x, x) \geq 0 \text{ u. } \sigma(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \forall_{x, y \in V} \quad \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall_{x, y \in V} \quad \sigma(x, -), \sigma(-, y): V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}$$

Beisp.

$$1) \quad V = \mathbb{R}^n \quad \sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t \cdot y$$

" Skalarprodukt "

$$2) \quad V = C_0(I, \mathbb{R}) \quad I = [a, b]$$

$$f \in C_0(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\sigma(f, g) := \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

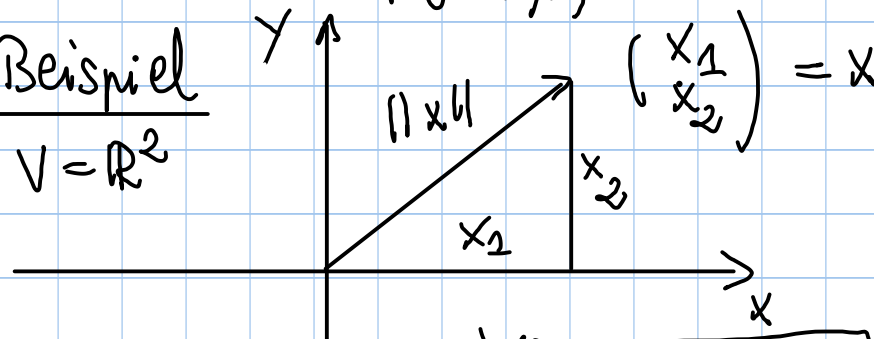
Länge von Vektoren

Def. (V, σ) euklidisch. ; $x \in V$

$$\|x\| := \sqrt{\sigma(x, x)}$$

Beispiel

1) $V = \mathbb{R}^2$



$$\text{allg. } \|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

2) $f \in C(I, \mathbb{R})$

$$\|f\| = \sqrt{\sigma(f, f)} =$$

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x) dx.}$$

Abstand zwischen Vektoren

Def. (V, σ) eukl. VR u. $x, y \in V$

Abstand zwischen x u. y

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Lemma Sei (V, σ) eukl. Dann gelten

$$\textcircled{1} \quad \forall_{x \in V} \quad \|x\| \geq 0 \text{ u. } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \forall_{\substack{x \in V \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\textcircled{3} \quad \forall_{x, y \in V} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Dreiecksungl.

Beweis Übungsaufg.

$$\|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)} \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sigma(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Normierter Vektorraum

Def Sei $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.
 $(V, \| \cdot \|)$ heißt normierter Vektorraum



(N1)

\forall
 $x \in V$

$$\|x\| \geq 0 \text{ u. } \|x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

(N2)

\forall
 $x \in V$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(N3)

\forall
 $x, y \in V$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Satz Jeder eukl. VR ist ein normiertes VR.

Beisp. $V = \mathbb{R}^n$

$$1) \quad \|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

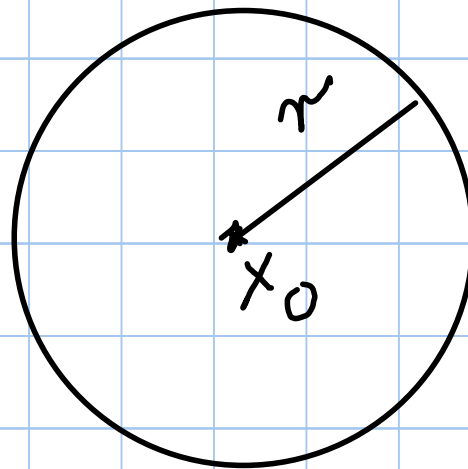
$$2) \quad \|x\| := \max \{ |x_i|; i=1, \dots, n \}$$

$$3) \quad \|x\| := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad p \geq 1; p \in \mathbb{R}.$$

Def Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR. Dann
def. $d(x, y) := \|x - y\|$ eine
"Metrik" (Abstandsfkt) auf V .

Beisp. Kreis K

$$K(x_0, r) := \{x \in V; \|x - x_0\| \leq r\}$$



Metrische Räume

Def. X Menge; $X \neq \emptyset$

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

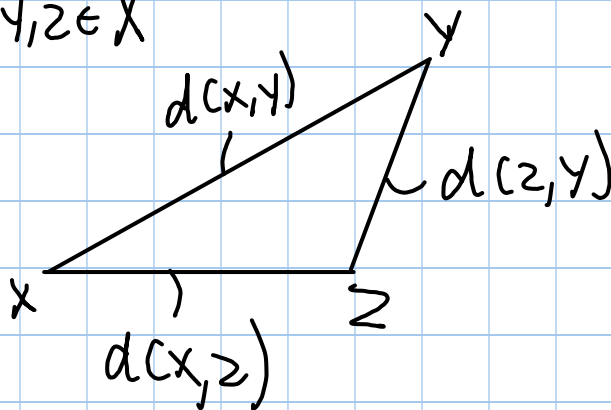
Abstand von x zu y .

(X, d) heißt metrischer Raum \Leftrightarrow def.

$$\textcircled{1} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d(x, y) \geq 0 \quad \text{u.} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\textcircled{2} \quad \forall_{x, y \in X} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall_{x, y, z \in X} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



Satz Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR.
Dann ist (V, d) mit
$$d(x, y) := \|x - y\|$$

ein metrischer Raum.

Bemerk. Euklidisch \Rightarrow normiert \Rightarrow metrisch
 \nLeftarrow \nLeftarrow

Beisp. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. und
$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

 $\Rightarrow (X, d)$ metrischer Raum.

Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei (V, σ) euklidisch. Dann gilt

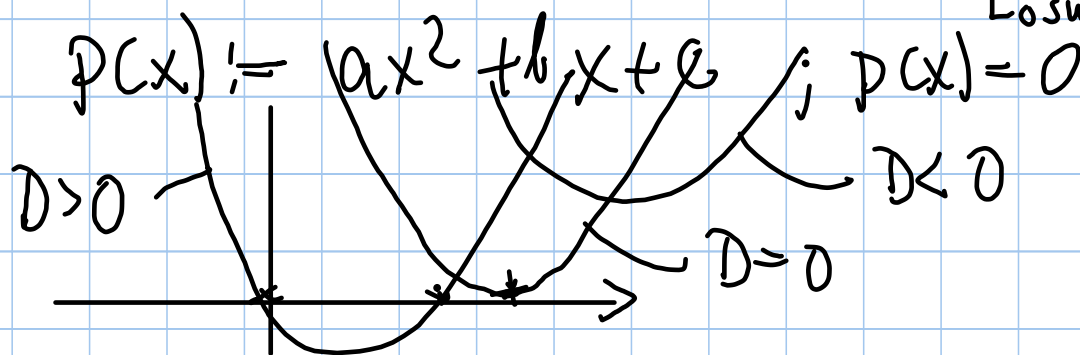
$$\forall x, y \in V \quad |\sigma(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Beweis

$$\textcircled{1} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

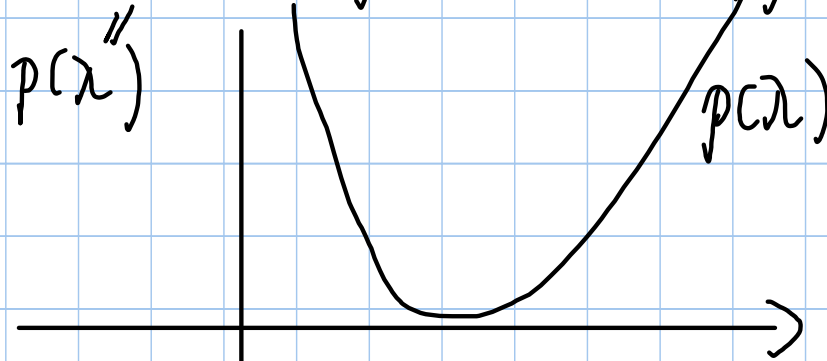
$$\text{Diskr. } D := b^2 - 4ac = \begin{cases} > 0 & 2 \text{ Lösungen} \\ = 0 & 1 \text{ Lösung} \\ < 0 & \text{keine reelle Lösung.} \end{cases}$$



$$\textcircled{2} \quad 0 \leq \sigma(\lambda x + y, \lambda x + y) \stackrel{\text{Bilinear.}}{=} \quad$$

$$= \lambda \sigma(x, \lambda x + y) + \sigma(y, \lambda x + y)$$

$$= \lambda^2 \sigma(x, x) + 2\lambda \sigma(x, y) + \sigma(y, y)$$



$$\Rightarrow \quad \mathcal{D} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D} = 4\sigma(x, y)^2 + 4\sigma(x, x)\sigma(y, y) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(x, y)^2 \leq \sigma(x, x) \cdot \sigma(y, y)$$

$$\Rightarrow \quad |\sigma(x, y)| \leq \sqrt{\sigma(x, x)} \sqrt{\sigma(y, y)} = \|x\| \|y\|$$

$$|\sigma(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\Rightarrow \frac{|\sigma(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

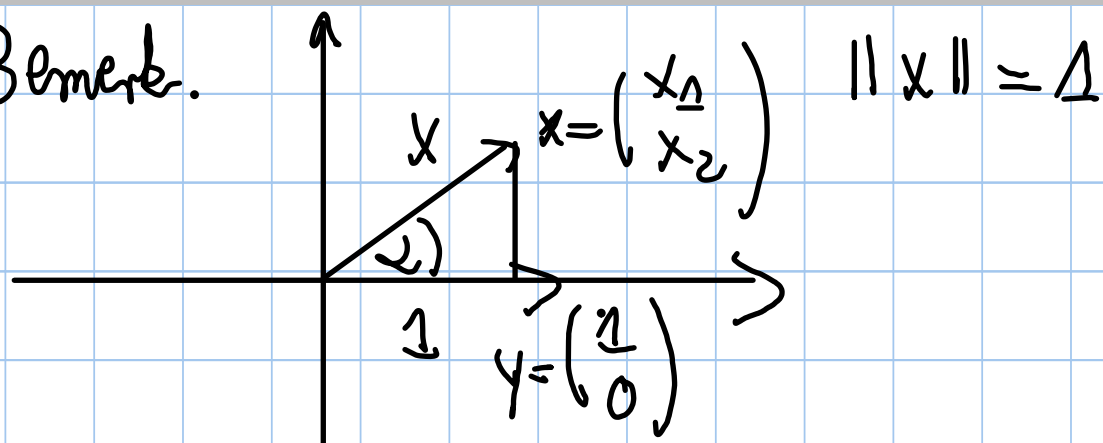
$$\Rightarrow -1 \leq \frac{\sigma(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

Def. Sei (V, σ) Enkl. . $x, y \in V$

$$\cos(\alpha) := \frac{\sigma(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Winkel zwischen
x u. y.

Bemerk.



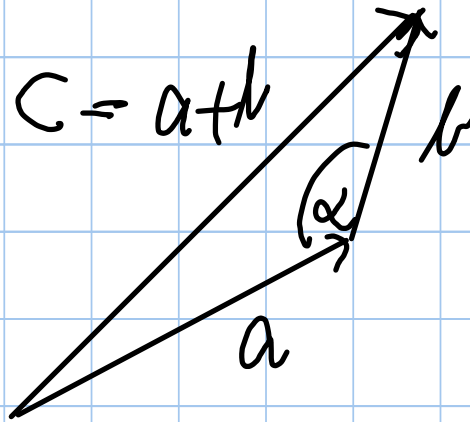
$$\begin{matrix} x_1 = \cos \alpha \\ x_2 = \sin \alpha \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x_1 = \cos \alpha \\ x_2 = \sin \alpha \end{matrix}} \right\} x = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x, y)^* = \cos \alpha \cdot 1 + \sin \alpha \cdot 0 \\ = \cos \alpha.$$

$$*) \sigma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sigma(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Anwendung



$$\|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)}$$

$$\begin{aligned}\|c\|^2 &= \|a+b\|^2 = \sigma(a+b, a+b) = \\ &= \sigma(a, a) + \sigma(b, b) + 2\sigma(a, b) \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\text{(da } \cos(\alpha) = \frac{\sigma(x, y)}{\|x\|\|y\|})$$

Cosinussatz Bezeichnung wie oben.

$$\boxed{\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|\cos\alpha}$$

Spezialfall aus $\cos \alpha = \frac{\sigma(x, y)}{\|x\| \|y\|}$ folgt.

$$\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \sigma(x, y) = 0$$

Def. X orthogonal auf $y \Leftrightarrow \sigma(x, y) = 0$

Sei $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \sigma(x, y) = 0$

Satz (Pythagoras) Sei $\alpha = \pi/2$. Dann gilt

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Beweis Kosinussatz

$$\|c\|^2 = \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\|\cos \alpha$$