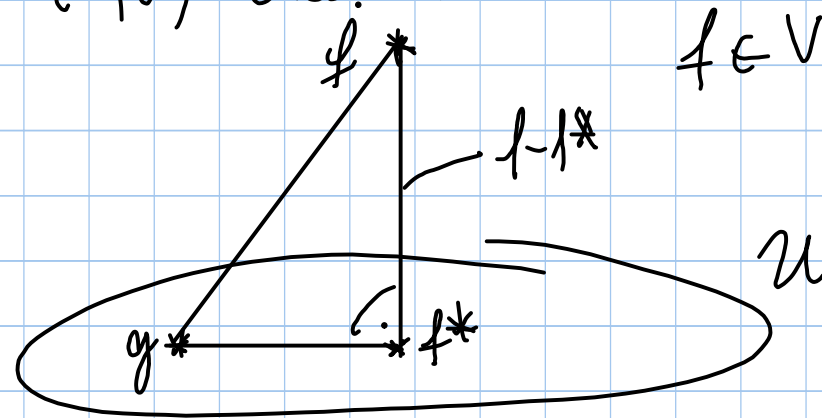


(V, σ) endl. VR



$$\forall \quad \|f - f^*\| \leq \|f - g\|$$

$$g \in U \quad U = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$

$$U \ni f^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = \sigma(f, g_k) \quad k=1, \dots, n$$

Bem. $f - f^* \perp U \Leftrightarrow f - f^* \perp g_k$

$$\Leftrightarrow \sigma(f - f^*, g_k) = 0 \quad k=1, \dots, n$$

Def. (V, σ) endl.

$C = \{c_1, \dots, c_n\}$ heißt ONS

(Orthonomalsystem)

$$\Leftrightarrow \sigma(c_i, c_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow i \neq k \quad c_i \perp c_k \quad n.$$

$$i = k \quad \|c_i\| = 1. \quad n$$

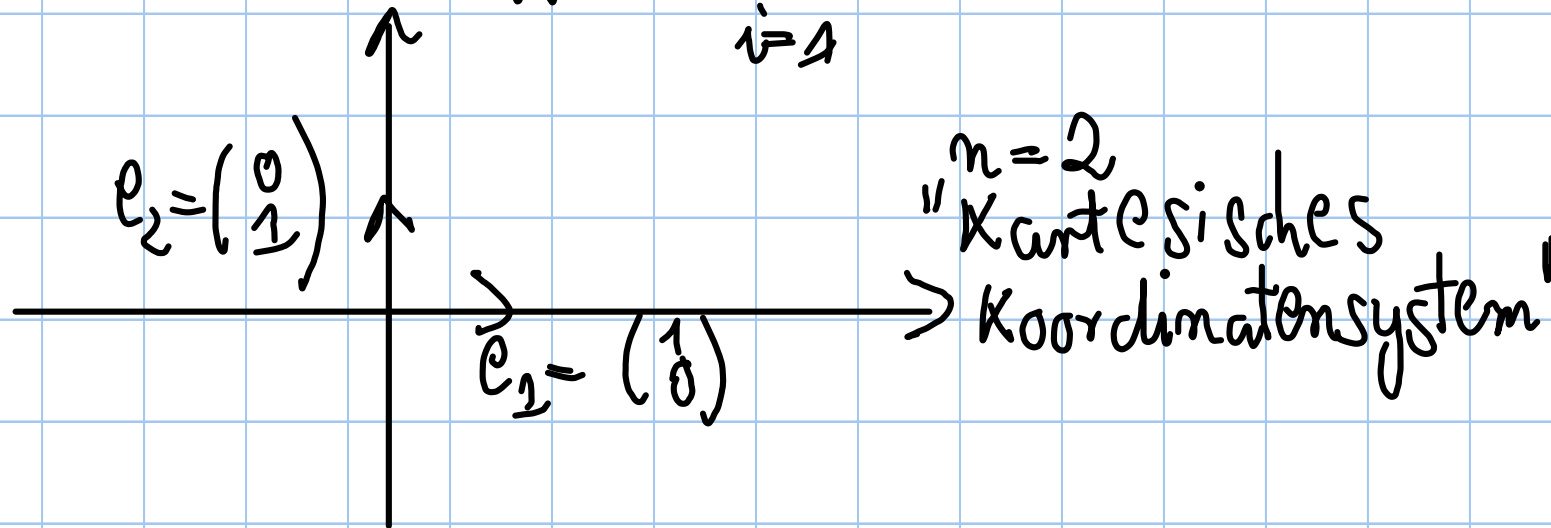
Beisp. \mathbb{R}^n ; $\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$B = \{c_1, \dots, c_n\}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (i-te. Komponente)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\sigma(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$

da $\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$



Lemma (U, σ) endl. Raum;
 $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ONS \Rightarrow
 c_1, \dots, c_n linear unabhängig

Beweis f.u. $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$$0 = \sigma\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i}_{=0}, c_k\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(c_i, c_k) = \lambda_k$$

Folgerung (V, σ) endl., $\dim V = n$:
 Ist $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ ONS $\Rightarrow C$ Basis von V .

Bem. $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i$

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \alpha_i) c_i$$

$$\Rightarrow \lambda_i - \alpha_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \alpha_i$$

$i=1, \dots, n$

Sei $f^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ beste Approx von

f in U , $\dim U = n$. Sei $\{g_1, \dots, g_n\}$ ONS von U .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = \sigma(f, g_k) \quad k=1, \dots, n.$$

$$\Rightarrow_{\text{ONS}} \lambda_k = \sigma(f, g_k) \quad k=1, \dots, n$$

Satz Sei (V, σ) eukl. u. $B = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine Orthonormalbasis von U .

Die beste Approximation f^* von $f \in V$ in U ist

$$f^* = \sum_{k=1}^n \sigma(f, g_k) g_k$$

Satz (Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren)
(E. Schmidt 1876-1959)

Sei (V, σ) eukl. n.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V .

Dann ex. ein ONS $C = \{c_1, \dots, c_n\}$
durch folg. Algorithmus

$$\textcircled{1} \quad c_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$\textcircled{2} \quad c_l' = b_l - \sum_{i=1}^{l-1} \sigma(b_l, c_i) c_i$$

$$c_l = \frac{c_l'}{\|c_l'\|} \quad l = 2, \dots, n.$$

Beweis

$$\textcircled{1} \quad c_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|} ; \sigma(c_1, c_1) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad c_2 = ?$$

$$c_2' := b_2 + \lambda_1 c_1 \text{ mit } c_2' \perp c_1.$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma(c_2', c_1) = \sigma(b_2 + \lambda_1 c_1, c_1) = \\ \sigma(b_2, c_1) + \lambda_1 \underbrace{\sigma(c_1, c_1)}_{=1} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -\sigma(b_2, c_1)$$

$$c_2' = b_2 - \sigma(b_2, c_1) c_1.$$

$$\Rightarrow c_2 := \frac{c_2'}{\|c_2'\|} ;$$

$$* \quad \|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)} \Rightarrow \sigma(x, x) = \|x\|^2$$

$$\textcircled{3} \quad c_3' := b_3 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \text{ mit} \\ c_3' \perp c_1 \quad \text{u.} \quad c_3' \perp c_2$$

$$\begin{aligned} 3.1) \quad 0 &= \sigma(b_3 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2, c_1) = \\ &\sigma(b_3, c_1) + \lambda_1 \underbrace{\sigma(c_1, c_1)}_1 + \lambda_2 \underbrace{\sigma(c_2, c_1)}_0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= -\sigma(b_3, c_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2) \quad 0 &= \sigma(b_3 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2, c_2) = \\ &\sigma(b_3, c_2) + \lambda_1 \underbrace{\sigma(c_1, c_2)}_0 + \lambda_2 \underbrace{\sigma(c_2, c_2)}_1 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= -\sigma(b_3, c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3' &= b_3 - \sigma(b_3, c_1)c_1 - \sigma(b_3, c_2)c_2 \\ c_3' &:= \frac{c_3'}{\|c_3'\|}; \end{aligned}$$

$\textcircled{4}$ Rest über Induktion \square

Beispiel ① $V = C_0(I, \mathbb{R})$ $I = [0, 1]$

$$\sigma(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x, \quad f(x) = x^3$$

$$g \in \langle g_1, g_2 \rangle = \{ \alpha x + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$f^* = -1/5 + 9/10 x \quad \text{beste Approx.}$$

$$\textcircled{2} \quad C = \left\{ \underbrace{1}_{g_1}, \underbrace{\sqrt{12}(0.5-x)}_{g_2} \right\}$$

g_1, g_2 ONS in $\langle 1, x \rangle$

$$\text{Beste Approx } f^* = \sum_{i=1}^n \sigma(f, g_i) g_i$$

$\{g_1, \dots, g_n\}$ ONS

$$\Rightarrow f^* = \sigma(f, g_1) g_1 + \sigma(f, g_2) g_2$$

$$\sigma(f, g_1) = \int_0^1 x^3 dx$$

$$\sigma(f, g_2) = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{12}(0.5-x) dx$$

$$\Rightarrow f^* = -1/5 + 9/10 x. \quad \square$$

Bemerk. (z. Blatt 7)

(V, σ) eukl. $U \subseteq V$ endl. dim.
Unterraum.

$$P: V \longrightarrow U$$

$$f \longmapsto P(f) = f^* \text{ beste Approx.}$$

P ist lineare Abbildung.

Sei $\dim V = m$ u. $D := \{d_1, \dots, d_m\}$ eine
Basis von V .

geg. $P(d_1), \dots, P(d_m) \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \forall \\ f \in V \\ f = \sum_{i=1}^m \alpha_i d_i \end{array} \quad \boxed{P(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i P(d_i)}$$

d.h. die lineare Abbildung P "Beste Approximation"
ist durch $P(d_1), \dots, P(d_m)$ bestimmt.

Fourierentwicklung

Sei $V = C_0(I, \mathbb{R})$ 2π $I = [0, 2\pi]$ und

$$\sigma(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Orthonormalsystem ist gegeben durch

$$f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$$

$$g_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx)$$

$$U_n := \langle f_0, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \rangle \quad k=1, \dots, n$$

Sei $f \in C_0(I, \mathbb{R})$ beliebig

Beste Approximation f^* von f in U_n

$$f^* = \sigma(f, f_0) f_0 + \sum_{k=1}^n \sigma(f, f_k) f_k + \sum_{k=1}^n \sigma(f, g_k) g_k$$

$$= \sigma(f, f_0) \cdot f_0 + \sum_{k=1}^n (\sigma(f, f_k) f_k + \sigma(f, g_k) g_k)$$

$$\sigma(f, f_0) f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

$$\sigma(f, f_k) f_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \cos(kx) dx \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \cos(kx)$$

$$\sigma(f, g_k) g_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \cdot \sin(kx)$$

$$\sigma(f, f_k) f_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \cdot \cos(kx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$f^* = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Bemerk.

Satz (Fourierreihenentwicklung).

Sei $f \in C_0(I, \mathbb{R})$; $I = [0, 2\pi]$. Dann gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Diese Darstellung von $f(x)$

heißt Fourierreihenentwicklung von

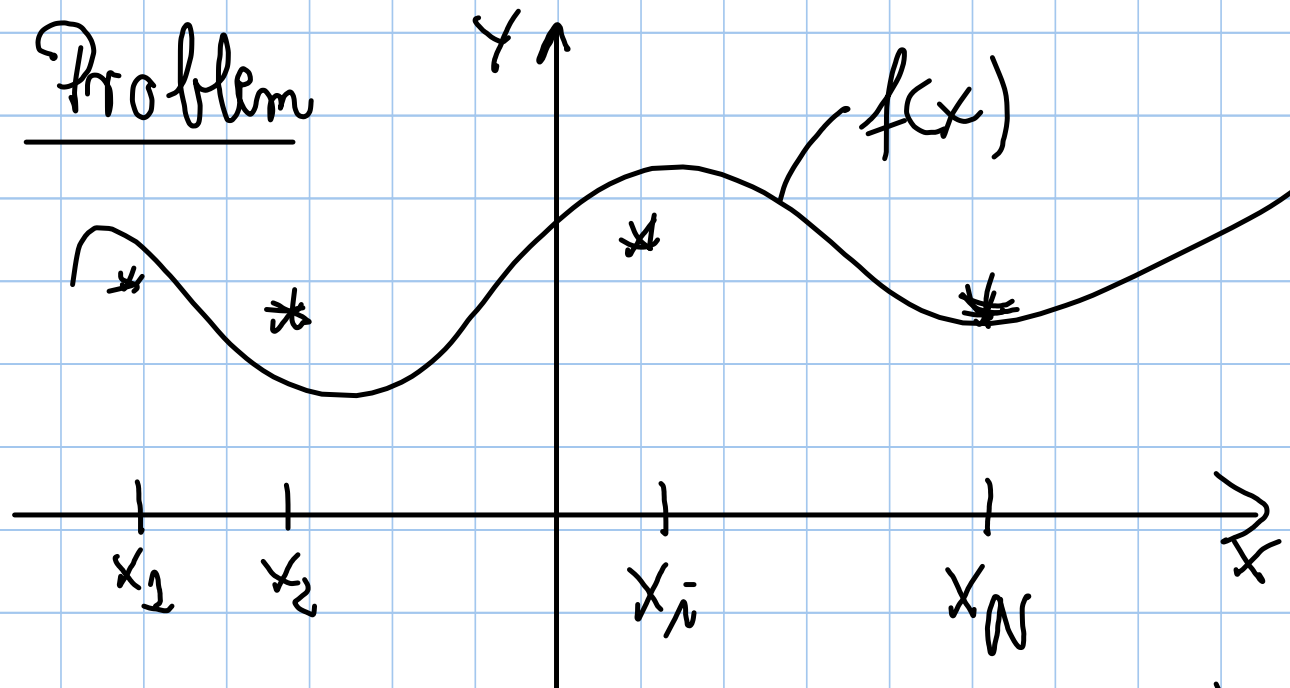
Folgerung Bezeichn. wie oben. Sei $n \in \mathbb{N}$

Dann ist $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

beste Approximation von f .

Diskrete Approximation

Problem



Messpunkte: x_1, \dots, x_N ($x_i \neq x_j$
 $i \neq j$)

Messwerte: y_1, \dots, y_N

Gesucht $f \in C_0(I, \mathbb{R})$, die die Werte (x_i, y_i)
bestmöglichst approximiert.

Auswertung.

$$\begin{array}{ccc} \text{Lemma } C_0(I, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\overline{(\cdot)}} & \mathbb{R}^N \\ f & \longrightarrow & \overline{f} := \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung

$$\text{d.h. } \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\text{Beweis. } \overline{\lambda f} = \lambda \cdot \overline{f}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{f+g} &= \begin{pmatrix} (f+g)(x_1) \\ \vdots \\ (f+g)(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) + g(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) + g(x_N) \end{pmatrix} \\ &= \overline{f} + \overline{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{\lambda f} &= \begin{pmatrix} (\lambda f)(x_1) \\ \vdots \\ (\lambda f)(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot f(x_1) \\ \vdots \\ \lambda \cdot f(x_N) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \overline{f}. \end{aligned}$$