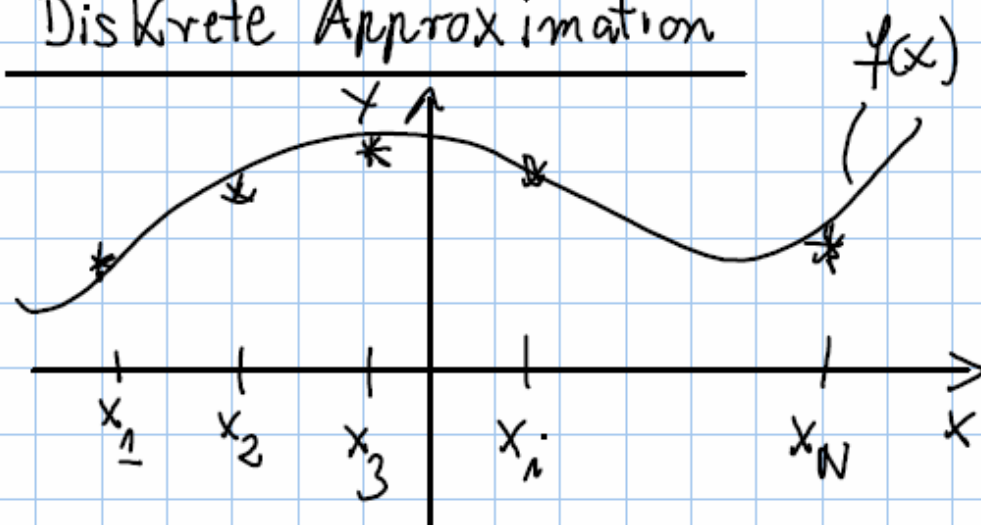


Discrete Approximation



Ansatz

$$C_0(I, \mathbb{R}) \quad I = [a, b]$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$$C_0(I, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}^N$$

$$f \mapsto \bar{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$* f, g \in C_0(I, \mathbb{R})$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x); (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Messpunkte x_1, \dots, x_N $x_i \neq x_j$
 $i \neq j$

Messwerte y_1, \dots, y_N

$$C_0(I, \mathbb{R}) \xrightarrow[\not{f} \mapsto \bar{f}]{\bar{G}} \mathbb{R}^N \ni \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\langle g_1, \dots, g_n \rangle^*$$

Discrete Approximationsproblem

gesucht $f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ mit

$$\forall g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \quad \| \bar{f}^* - \bar{y} \| \leq \| \bar{g} - \bar{y} \|$$

$$* \langle g_1, \dots, g_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\langle 1, x \rangle = \{ \alpha x + \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Diskrete Approximationsproblem

gesucht $f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ mit

$$\forall \quad \begin{matrix} \| \overline{f^*} - \overline{y} \| \leq \| \overline{g} - \overline{y} \| \\ g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \end{matrix}$$

$$\overline{f^*} = \begin{pmatrix} f^*(x_1) \\ \vdots \\ f^*(x_N) \end{pmatrix}; \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \overline{g} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^N \quad \sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$\|\overline{f^*} - \overline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (f^*(x_i) - y_i)^2}$$

$$\|\overline{g} - \overline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (g(x_i) - y_i)^2}$$

gesucht $f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ mit

$$\forall \quad \| \bar{f}^* - \bar{y} \| \leq \| \bar{g} - \bar{y} \|$$

$$g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \quad \sum_{i=1}^N (f^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^N (g(x_i) - y_i)^2$$

$$g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$

"Methode der kleinsten Quadrate
von Gauss."

$$\begin{array}{ccc}
 C_0(T, \mathbb{R}) & \xrightarrow{(\cdot)} & \mathbb{R}^N \ni \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \langle g_1, \dots, g_n \rangle & \xrightarrow[\text{majdetiv}]{(\cdot)} & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \\
 g = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i & \mapsto & \bar{g} = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{g}_i
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\cdot) : \langle g_1, \dots, g_n \rangle & \mapsto & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \text{ maj.} \\
 h = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i & \mapsto & \bar{h} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{g}_i
 \end{array}$$

$$C_0(I, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{R}^N \ni \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \begin{matrix} = \\ \downarrow \end{matrix} & \uparrow \\ \langle g_1, \dots, g_n \rangle & \xrightarrow[\text{injektiv}]{(\cdot)} & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \ni \bar{y}^* \end{array}$$

$$f^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$$

$$\text{Es gilt } f^* = \bar{y}^*$$

$\Rightarrow \forall$

$$g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$

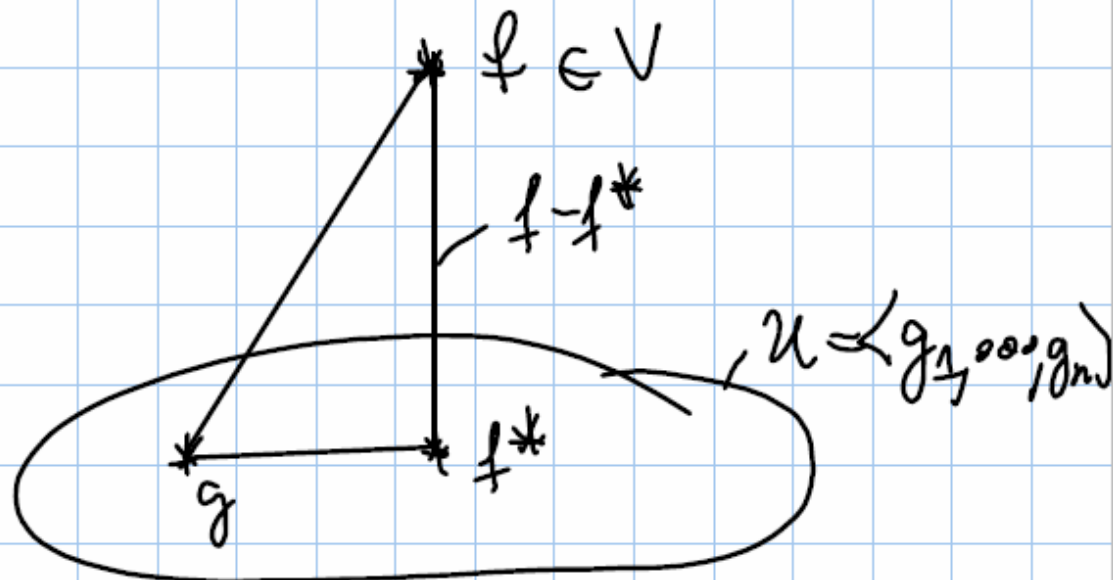
$$\bar{y}^* = \alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n$$

beste Approx. von \bar{y} in
 $\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$

$$\|f^* - \bar{y}\| = \|\bar{y}^* - \bar{y}\| \leq \|\bar{g} - \bar{y}\|$$

$(V, \sigma) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \sigma)$ eukl.

$$\sigma(x, y) = \sum_i x_i y_i$$



$$\forall g \in U \quad \|f^* - f\| \leq \|g - f\|$$

$$f^* := \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \text{ mit}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = \sigma(f, g_k) \quad k=1, \dots, n$$

$$C_0(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{R}^N \ni \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \begin{array}{c} = \\ \downarrow \end{array} & \uparrow \\ \langle g_1, \dots, g_n \rangle & \xrightarrow[\text{surjektiv}]{(\cdot)} & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \ni \bar{y}^* \end{array}$$

$$f^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$$

$$\text{Es gilt } f^* = \bar{y}^*$$

$$\Rightarrow \forall$$

$$g \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$

$$\bar{y}^* = \alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n$$

beste Approx. von \bar{y} in

$$\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$$

$$\|f^* - \bar{y}\| = \|\bar{y}^* - \bar{y}\| \leq \|\bar{g} - \bar{y}\|$$

Beispiele

$$\textcircled{1} \quad n=1 \quad g_1(x) = 1$$

$$C_0(T, \mathbb{R}) \xrightarrow{\bar{(\cdot)}} \mathbb{R}^N \ni \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\langle 1 \rangle \xrightarrow{\bar{(\cdot)}} \langle \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\parallel \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(g_i, g_k) = \sigma(1, g_k) \quad k=1, \dots, n \parallel$$

$$\lambda_1 \sigma(\bar{1}, \bar{1}) = \sigma(\bar{y}, \bar{1})$$

$$\sigma(\bar{1}, \bar{1}) = \sum_{i=1}^N 1 = N$$

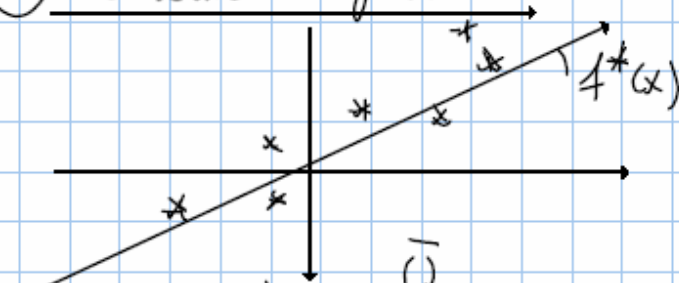
$$\sigma(\bar{y}, \bar{1}) = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\lambda_1 N = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}}$$

Mittelwert.
von y_1, \dots, y_N

② Linear Regression



$$C_0(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{R}^N \ni \bar{y}$$

$$\langle 1, x \rangle \xrightarrow{(\cdot)} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sigma(g_1, g_1) + \lambda_2 \sigma(g_2, g_2) &= \sigma(f, g_1) \\ \lambda_1 \sigma(g_1, g_2) + \lambda_2 \sigma(g_2, g_2) &= \sigma(f, g_2) \end{aligned}$$

$$g_1 = \bar{1}; g_2 = \bar{x} \quad f = \bar{y}$$

$$\sigma(\bar{1}, \bar{1}) = \sum_{i=1}^N 1 = N$$

$$\sigma(\bar{x}, \bar{1}) = \sigma(\bar{1}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sigma(\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$\sigma(\bar{y}, \bar{1}) = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$\sigma(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^N y_i x_i$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \sigma(g_1, g_1) + \lambda_2 \sigma(g_2, g_1) &= \sigma(f, g_1) \\ \lambda_1 \sigma(g_1, g_2) + \lambda_2 \sigma(g_2, g_2) &= \sigma(f, g_2)\end{aligned}$$

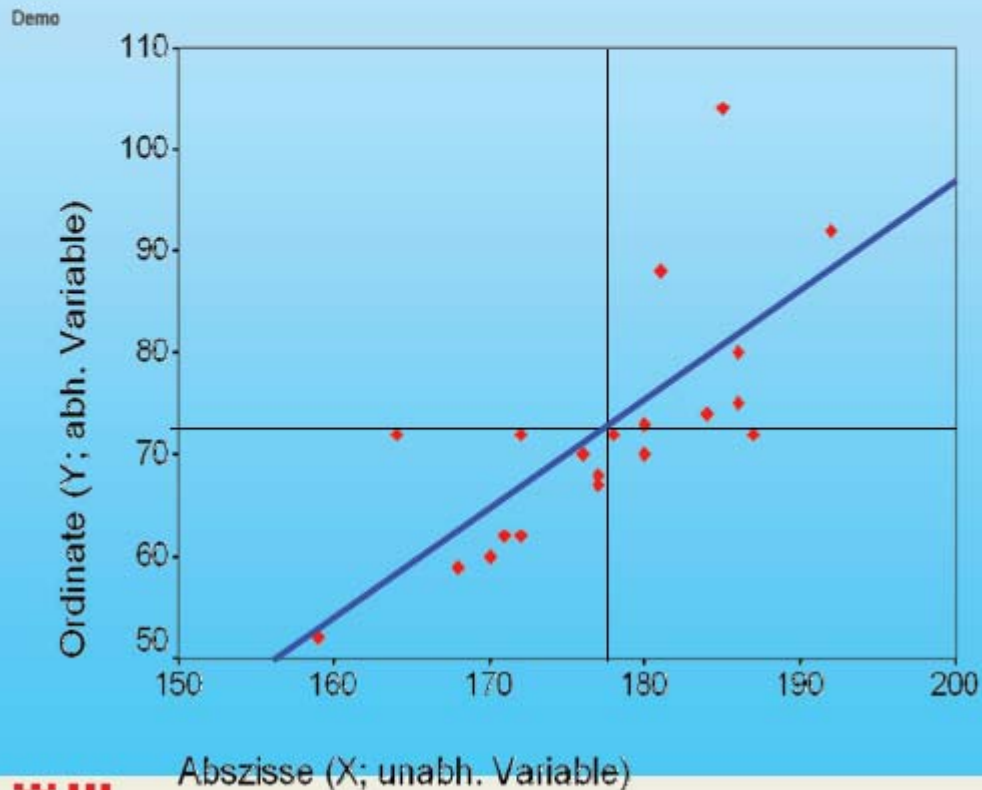
$$\lambda_1 N + \lambda_2 \sum_i x_i = \sum_i y_i$$

$$\lambda_1 \sum_i x_i + \lambda_2 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

$$f^*(x) = \lambda_2 x + \lambda_1$$

Ziel der Regression

Ziel der Regression ist es, die Regressionsgerade den Punkten so gut wie möglich anzupassen.



Dies geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate, OLS. Die Regressionsgerade minimiert also die Summe der quadrierten Vorhersagefehler:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = \min!$$

Lineare Regression

*** Vorhersage eines Merkmals y (Kriterium)
durch ein Merkmal x (Prädiktor)**

**Alkoholkonzentration
(Promille)**

**Reaktions
zeit (ms)**

0

554

0.2

581

0.5

589

0.7

628

1

623

1.4

687

1.8

692

2.25

734

2.5

812

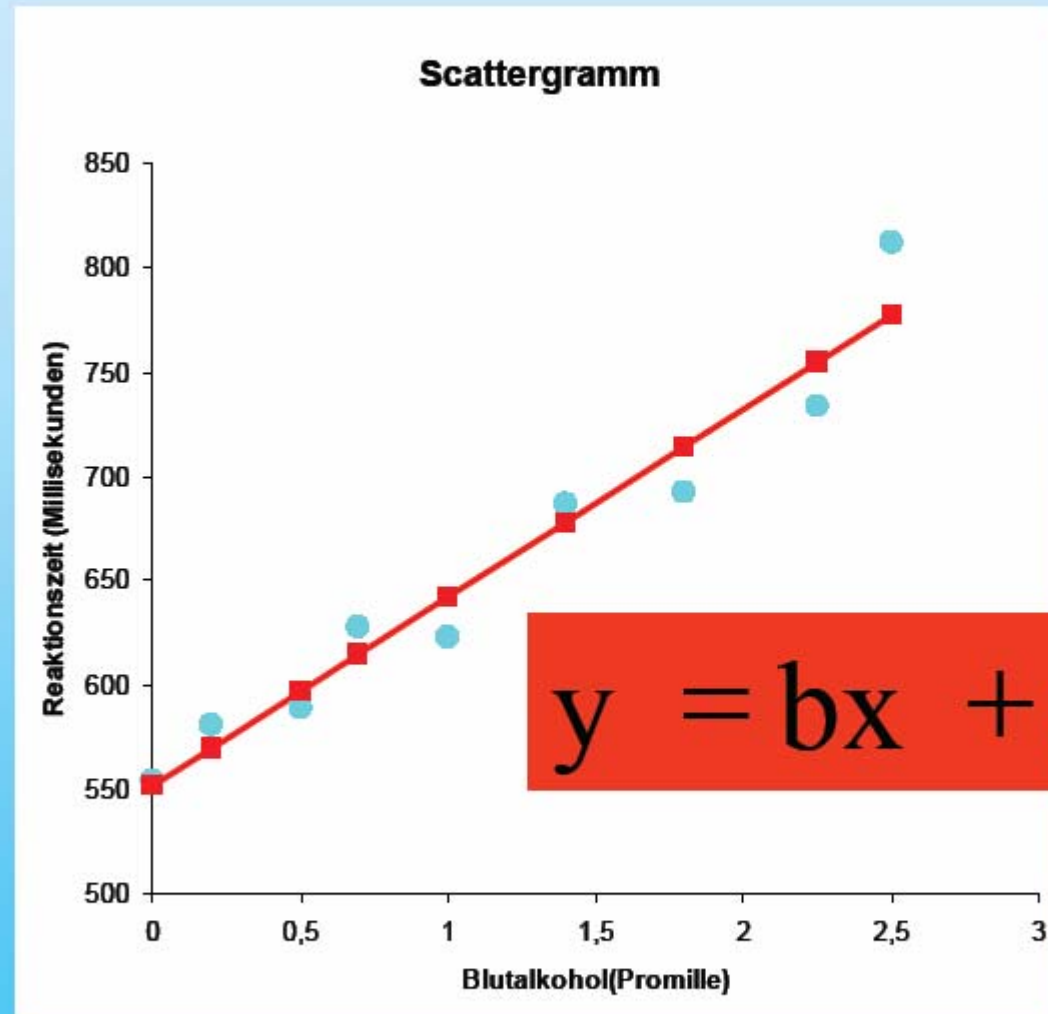


- Y ist Zielgröße und X Einflussgröße
- Wähle a und b, so dass

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2$$

minimal wird

Alkoholkonz. x (Promille)	Reaktionszeit y (ms)
0	554
0,2	581
0,5	589
0,70	628
1,0	623
1,4	687
1,8	692
2,25	734
2,5	812



Eigenschaften der vorhergesagten Werte

Alkoholkonz. x (Promille)	Reaktionszeit y (ms)	Vorhergesagte Reaktionszeit (\hat{y} ms)
0	554	551,68
0,2	581	569,74
0,5	589	596,84
0,70	628	614,91
1,0	623	642,00
1,4	687	678,14
1,8	692	714,27
2,25	734	754,92
2,5	812	717,50
$\bar{x} = 1,15$ $\hat{\sigma}_x^2 = 0,80$	$\bar{y} = 655,56$ $\hat{\sigma}_y^2 = 6883,28$	$\hat{y} = 655,56$ $\hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 = 6517,21$

**Der Mittelwert
der vorhergesagten
Werte ist gleich
dem Mittelwert
des Kriteriums!**

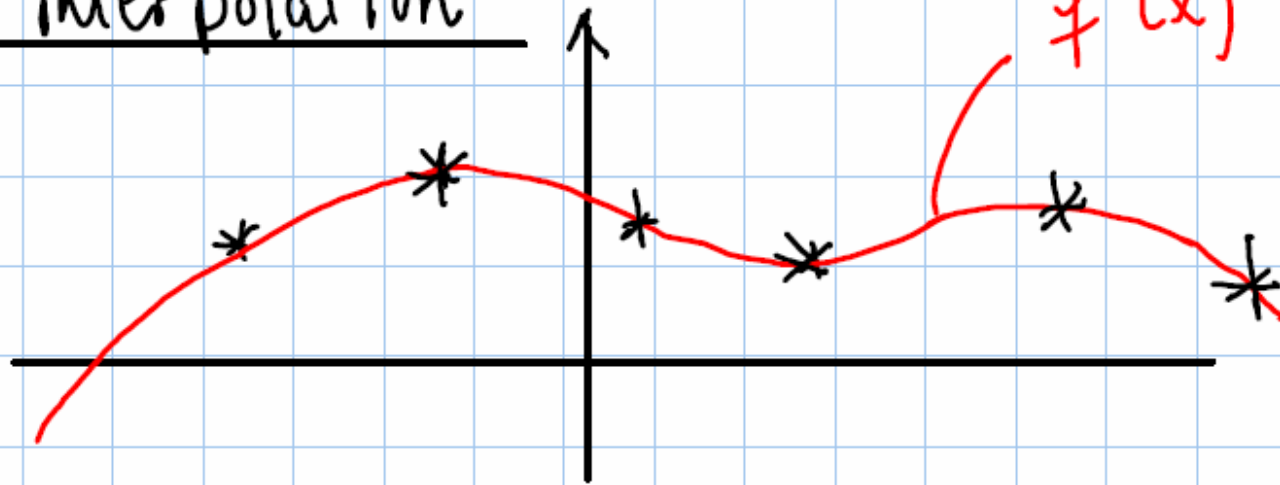
Lösung

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - \hat{\beta}_2 \cdot \sum_{i=1}^N x_i \right)$$

$\Rightarrow f^*(x) = \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_1$ ist
lineare Regression für $(x_i, y_i) \ i=1, \dots, N$

Interpolation



Problem: Gesucht $f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle \subseteq C(I, \mathbb{R})$

mit

$$\vec{f^*} = \begin{pmatrix} f^*(x_1) \\ \vdots \\ f^*(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\forall_{i=1, \dots, N} \quad f^*(x_i) = y_i$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_0(I, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & \mathbb{R}^N \ni \bar{y} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \langle g_1, \dots, g_n \rangle & \xrightarrow{\bar{\omega}} & \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle^*
 \end{array}$$

Interpolation: $\bar{y} = \bar{f}^* = \bar{y}^*$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$$

Satz Bezeichnung wie oben.
 Interpolationsproblem lösbar ($\bar{f}^* = \bar{y}$) \Leftrightarrow
 $\bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$.

Satz Geg. $(x_i, y_i); i=1, \dots, N$ mit $x_i \neq y_i$
 $\text{für } i \neq j$

$g_1, \dots, g_N \in C_0(I, \mathbb{R})$ mit $x_i \in I; i=1, \dots, N$ und
 $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N$ linear unabhängig \Rightarrow .

$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^N$ Approximationsproblem ist lösbar.

Beweis $\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N \rangle = \mathbb{R}^N \Rightarrow \forall \bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N \rangle$
 $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$

Beispiel. $(x_i, y_i) i=1, \dots, N$ $x_i \neq x_j$
 $i \neq j$

$g_1=1, g_2=x, \dots, g_N=x^{N-1}$

$C_0(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N \ni \bar{y}$

\uparrow

$\uparrow \parallel$

$\langle 1, \dots, x^{N-1} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{N-1} \rangle$
 $\bar{y}^* = \bar{y}$

Satz (Hauptsatz der Interpolations

Theorie)

geg $(x_i, y_i) \ i=1, \dots, N$

$x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ Dann existiert

genau ein Polynom $P(x)$ vom Grade $\leq N-1$

mit \forall
 $i=1, \dots, N$

$$P(x_i) = y_i$$

Bemerkung.

Beispiele für Familien von Fkt $g_i \in C_0(I, \mathbb{R})$

1) $1, x, x^2, \dots, x^n$

2) $\sin(kx), \cos(kx); k=0, 1, \dots, n$