

## Diskrete Approximation u. Interpolation

Gegeben  $(x_i, y_i)$ ,  $x_i \in [a, b] =: I$  für  $i = 1, \dots, N$   
und  $g_1, \dots, g_n \in C_0(I, \mathbb{R})$

Problem: Gesucht  $f^* \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$   
mit der Eigenschaft.

$$\forall \quad \| f^* - \bar{y} \| \leq \| \bar{g} - \bar{y} \|$$

$\bar{g} \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle$

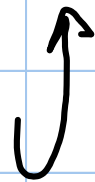
Spezialfall:

$$\forall \quad i = 1, \dots, N$$

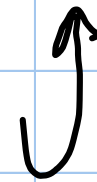
$f^*$  heißt Interpolationsfunktion

$$f^*(x_i) = y_i$$

$$C_0(I, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{R}^N \ni \bar{y}$$



$\Rightarrow$



beste Approximation

$$\langle g_1, \dots, g_n \rangle \xrightarrow[\text{min.}]{(\cdot)} \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle \ni \bar{y}^*$$

Sei  $f^*(x_i) = y_i; i=1, \dots, N \Rightarrow$

$$\bar{y}^* = \bar{f}^* = \bar{y}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y} \in \langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \rangle$$

## Hauptsatz der Interpolationstheorie

geg.  $(x_i, y_i) \quad i=1, \dots, N; x_i \neq x_j, i \neq j$   
Dann ex. genau ein Polynom  $p(x)$   
mit  $\deg(p(x)) \leq N-1$  mit.

$$\forall \quad i=1, \dots, N \quad p(x_i) = y_i$$

Beweis

$$C_0(I, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\cdot)} \mathbb{R}^N \ni \bar{y}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \parallel$$
$$\langle 1, x, \dots, x^{N-1} \rangle \xrightarrow{(\cdot)} \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{N-1} \rangle$$

linear unabhängig

$$\Rightarrow \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{N-1} \rangle = \mathbb{R}^N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \langle \bar{1}, \dots, \bar{x}^{N-1} \rangle \Rightarrow \bar{y}^* = \bar{y}$$

$\Rightarrow$  Interpolationspolym.  $p(x)$  existiert

$$\text{Da } (\cdot) : \langle 1, x, \dots, x^{N-1} \rangle \rightarrow \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{N-1} \rangle$$

bijektiv  $\Rightarrow$

Interpolationspolynom ist eindeutig.  $\square$

## Methode von Lagrange

geg  $(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, N$

$$L_i(x) := \frac{(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_N)}{(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_N)}$$

Dann gilt

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$\Rightarrow p(x) := \sum_{i=1}^N L_i(x) y_i$  ist Inter-  
polationspolynom für  $(x_i, y_i)$

$$\text{Beweis } p(x_j) = \sum_{i=1}^N L_i(x_j) y_i = y_j$$

**Beispiel:**  $f(x) = (\sin x)^3 + 3.5$  (blau) soll durch ein Polynom dritten Grades  $P(x)$  (grün) interpoliert. Folgende Werte wurden durch Computerberechnung ermittelt und werden auf vier Stellen verkürzt ausgegeben.

$$x_0 := -4; x_1 := -2; x_2 := 0; x_3 := 2$$

Die Lagrangepolynome  $L_i$ :

$$L_0(x) = -0.0208x^3 + 0.0833x$$

$$L_1(x) = 0.0625x^3 + 0.125x^2 - 0.5x$$

$$L_2(x) = -0.0625x^3 - 0.25x^2 + 0.25x + 1$$

$$L_3(x) = 0.0208x^3 + 0.125x^2 + 0.1666x$$

Die Linearfaktoren  $f_i$ :

$$f_0 = 3.9334$$

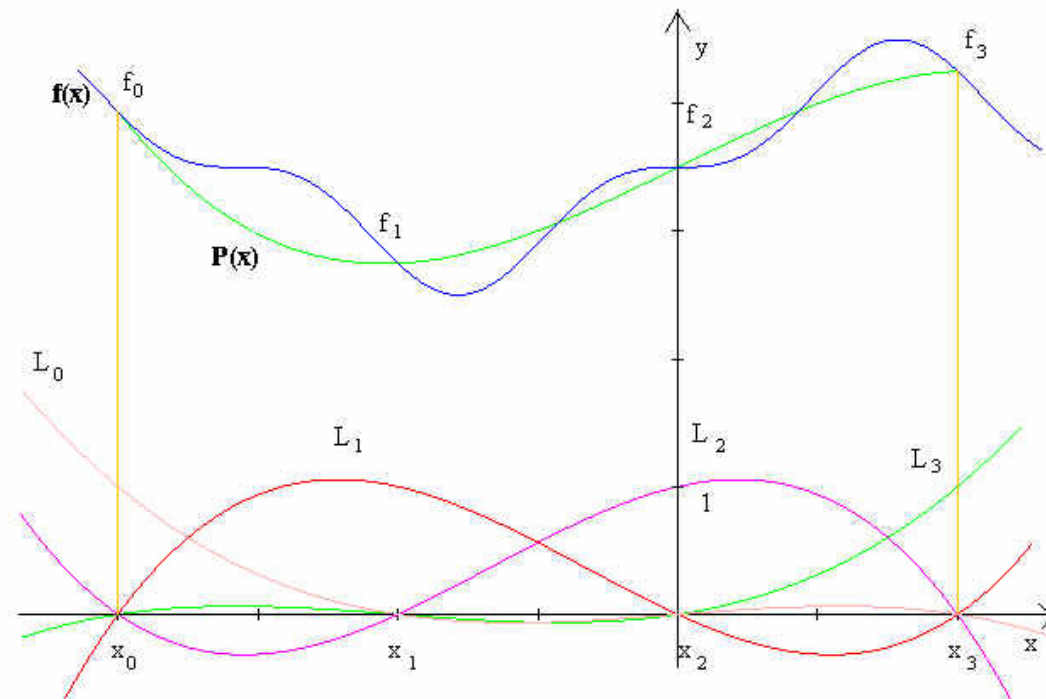
$$f_1 = 2.7481$$

$$f_2 = 3.5$$

$$f_3 = 4.2518$$

Beispiel

## Interpolationspolynom



Für das interpolierende Polynom ergibt sich daraus:

$$P_3(x) = -0.0403x^3 + 0.537x + 2.5$$

Dieses Polynom stellt die eindeutige Lösung für das gegebene Interpolationsproblem dar.

## Determinanten

### Vorgehensregeln

$$\text{geg. } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann gilt } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2$$

$$x = \frac{\gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \quad y = \frac{\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

Dann heißt  $\det A := \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$ .

die Determinanten von A.

$\det A \equiv$  Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen - Produkt der Elemente der Nebendiag.

Nebendiag.  ~~$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$~~   $\alpha_2 \beta_2 - \beta_2 \alpha_2$  Hauptdiagonale



$$2) \quad a := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$a, b$  linear abhängig  $\Leftrightarrow \det A = 0$

Beweis  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\beta_1 = \lambda \alpha_1 \quad \text{u.} \quad \beta_2 = \lambda \alpha_2$$

$$\lambda = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \Leftrightarrow \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1 = 0$$

3)  $a, b$  linear unabhängig  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$4) A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Beweis. geg.  $A \in K^{n \times n}; A: K^n \rightarrow K^n$

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \exists B \in K^{n \times n} \text{ mit } AB = BA = E$$

$$\Leftrightarrow Ax = b; b \in K^n \text{ ist f\"ur jede rechte Seite eindeutig l\"osbar.}$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow$$

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

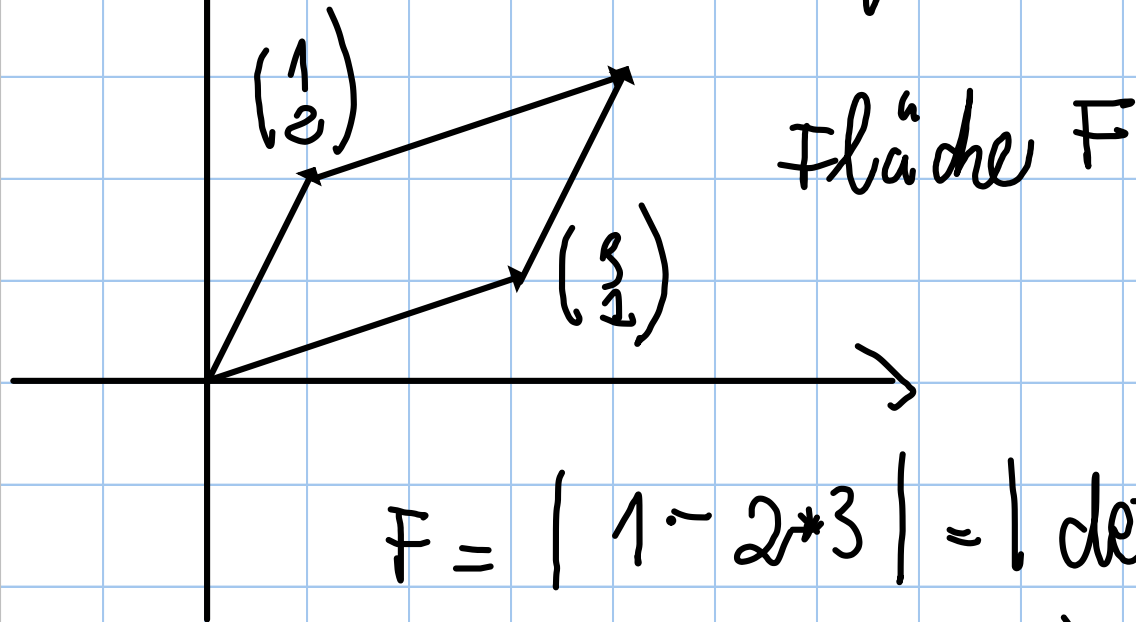
$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \text{ f\"ur } i=1, \dots, n$$

$$> A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \Leftrightarrow$$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ linear unabh\"angig}$$

$$> \boxed{\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertierbar}}$$

5) geg.  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$F = |1 \cdot 2 \cdot 3| = |\det(A)|$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\det(A) :=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\ + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$\text{d.h. } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$- a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

anschaulich →

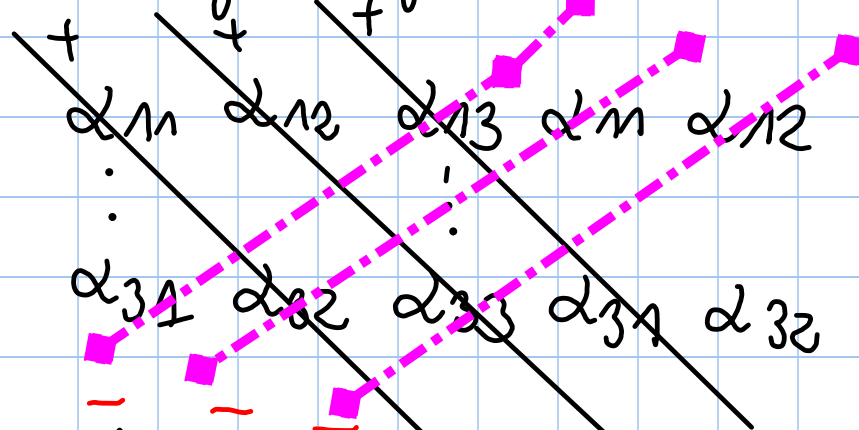


$$\det A = a_{11} \det A_{11} + a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31}$$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

$$a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + \dots$$

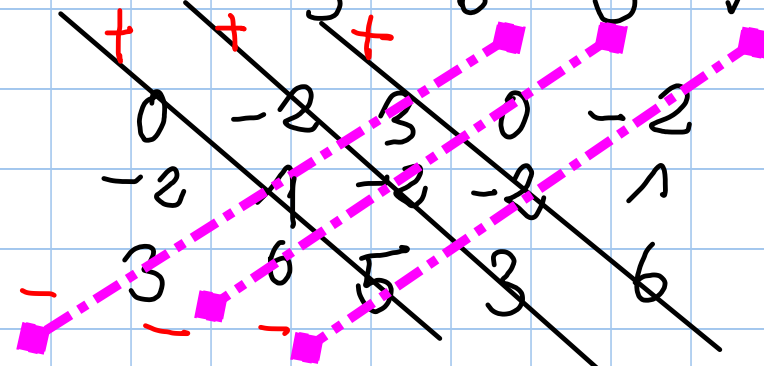
# Bemerkung Regel von Sarrus (1798-1861)



## Beispiel

Sei  $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$



$$0 + 12 - 36 - 9 - 0 - 20 = -53$$

$$\det A = -53$$

Bemerk.  $\rightarrow a_1, a_2, a_3$  linear unabhängig  
 $\det(a_1, a_2, a_3) \neq 0 \Leftrightarrow$   
 $A = (a_1, a_2, a_3)$  invertierbar

Def. Determinante einer  $n \times n$  Matrix

Rekursive Definition

1)  $n = 1$      $A = (\alpha_{11})$      $\det A := \alpha_{11}$

2) Für  $n \geq 2$

$$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \alpha_{31} \det A_{31} - \alpha_{41} \det A_{41} + \dots + (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \det A_{n1}$$

$A_{i1} \equiv$  Matrix, die aus  $A$  durch  
Entfernen der ersten Spalte u.  
der  $i$ -ten Zeile entsteht  
( $1 \leq i \leq n$ )



Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} +$$

$$a_{31} \det A_{31} - a_{41} \det A_{41}$$

$$= -32 - 3 \cdot 24 - 2(-16) = -72.$$

Bemerkung Wendet man die rekursive Def. sukzessive auf  $\det A_{j-1}$  an.

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$

Bemerkung

Permutation  $\pi: \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\text{bij.}} \{1, \dots, n\}$   
 $S_n :=$  Menge aller Permut. auf  $\{1, \dots, n\}$

Schreibweise  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

$$\text{sign}(\pi) := \prod_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\pi(k) - \pi(j)}{k - j} \in \{1, -1\}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{sign}(\pi) = \prod_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^4 \frac{\pi(k) - \pi(j)}{k - j}$$

Lemma  
 $\text{sign} : S_n \longrightarrow \{1, -1\} \text{ Gruppenth.}$

$$\text{sign } \pi \longmapsto \text{sign}(\pi)$$

Beweis:  $\text{sign}(\pi \sigma) \stackrel{?}{=} \text{sign}(\pi) \cdot \text{sign}(\sigma)$

$$\text{sign}(\pi \sigma) = \prod \frac{\pi \sigma(k) - \pi \sigma(j)}{k - j} =$$

$$\prod \frac{\pi \sigma(k) - \pi \sigma(j)}{\sigma(k) - \sigma(j)} \cdot \frac{\sigma(k) - \sigma(j)}{k - j} =$$

$$\prod \frac{\pi \sigma(k) - \pi \sigma(j)}{\sigma(k) - \sigma(j)} \prod \frac{\sigma(k) - \sigma(j)}{k - j}$$

$$\text{sign}(\pi)$$

$$\underbrace{\prod \frac{\sigma(k) - \sigma(j)}{k - j}}_{\text{sign}(\sigma)}.$$

□