

# Def. Determinante einer Matrix

Rekursive Def.

①  $n=1$   $A=(\alpha_n)$   $\det A := \alpha_{11}$

②  $n \geq 2$  (Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\det A := \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \dots + (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{n+1} \alpha_{n1} \det A_{n1}$$

$A_{i1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) ist die Matrix, die aus  $A$  durch Entfernen der ersten Spalte und der  $i$ -ten Zeile entsteht

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \alpha_{12} & \\ \alpha_{21} & & \\ & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} & \alpha_{1i} & \\ & & \alpha_{ii} & \\ & & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} & \alpha_{1n} & \\ & & \alpha_{in} & \\ & & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$$

Beweis

$$\det A = \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n-1} \alpha_{n1} \det A_{n1}$$

$\parallel$   
 $0$

$\parallel$   
 $0$

$$= \alpha_{11} \det A_{11} =$$

$$= \alpha_{11} \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & * & * \\ 0 & & * \\ \vdots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \dots =$$

induktion

$$= \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} \quad \square$$

Folgerung  $\det E = 1$

Satz  $\det : K^{n \times n} \longrightarrow K$   
 $A \longmapsto \det A$

1)  $\det E = 1$

2) Sind zwei Zeilen von  $A$  gleich  
 $\Rightarrow \det A = 0$

3)  $\det$  ist linear in jeder Zeile

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Indukt. nach  $n$ .

## Folgerung

① Addition des  $\lambda$ -fachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert der Determinante nicht.

② Vertauscht man zwei Zeilen, so kehrt sich das Vorzeichen um.

Beweis ①  $\det(e_1, \dots, e_i + \lambda z_j, \dots, z_j, \dots, z_n)$   
 $= \det(e_1, \dots, e_i, \dots, z_j, \dots, z_n) +$   
 $\lambda \underbrace{\det(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n)}_{= 0}$   
 $= \det(A)$

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} \quad & \det(\dots, z_i, \dots, z_j, \dots) = \\
& = \det(\dots, z_i - z_j, \dots, z_j, \dots) = \\
& = \det(\dots, z_i - z_j, \dots, z_i, \dots) \\
& = \det(\dots, -z_j, \dots, z_i, \dots) \\
& = - \det(\dots, z_j, \dots, z_i, \dots) \quad \square
\end{aligned}$$

# Elementare Zeilenumformungen

- 1) Vertauschen zweier Zeilen
- 2) Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda \neq 0$
- 3) Addition bzw. Subtraktion des  $\lambda$ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Beispiel:  $A \xRightarrow{\text{Elem. Zeilenumf.}} A' = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \backslash & \backslash \\ \vdots & & \backslash \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \\ \text{IV} - 2\text{I} \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschung

I mit III

=

$$- \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

IV + 2II

= -

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{IV} - \frac{3}{2}\text{III} \\ \\ \end{array} =$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 2 = 4 \quad \square$$

Satz (Cramer-Regel; 1704-1752)

Sei  $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n \times n}$  invertierbar.

$$Ax = b \Rightarrow x = ? \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x_i := \frac{1}{\det A} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Bemerkung:

1) Ist  $(V, \sigma)$  endl. n.  $g_1, \dots, g_n \in V$  linear unabhängig

$\Rightarrow A = (\sigma(g_i, g_j))$  ist invertierbar.

2) Ist  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar  $\Rightarrow$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$



Beweis: Sei  $b = Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i$

Nun gilt  $\det A = \det A^t$

(folgt aus  $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{sign}(\pi)} a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$   
 $= \det A^t$ .)

$\Rightarrow$  alle Sätze über Zeilen gelten analog für Spalten (von Determinanten)

$$\det(b, a_2, \dots, a_n) = \det\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, a_2, \dots, a_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \det(a_i, a_2, \dots, a_n) =$$

$$x_1 \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(b, a_2, \dots, a_n)}{\det A}$$

allgem.  $\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$   
 $= x_i \det A$

## Beispiel

$$2x + 3y = 3$$

$$5x - 7y = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}} = \frac{18}{29}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}} = \frac{17}{29}$$

Satz (Rechenregeln für Determinanten)

① "Symmetrie in Zeilen u. Spalten"

$$\det A^t = \det A.$$

② "Multiplikationssatz"

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

③ "Invertierbarkeitstest"

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

# Eigenwerte, Eigenvektoren

$$A \in K^{n \times n} \quad A: K^n \longrightarrow K^n$$

$$A = (a_1, \dots, a_n) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

Def.  $\lambda \in K$  heißt Eigenwert der Matrix  
 $A \in K^{n \times n}$   $\Leftrightarrow$  def Es gibt  $b \in K^n; b \neq 0$

mit

$$A b = \lambda b$$

$b$  heißt Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$

Beispiel. geg.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A hat Eigenwert  $\lambda = -2$  mit  
Eigenvektor  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , denn es gilt

$$Ab = -2b$$

Berechnung von Eigenwerten

$$Ab = \lambda b = \lambda E(b) \quad E \text{ Einheitsmatrix}$$

$$Ab = \lambda b \Leftrightarrow Ab = \lambda E(b) \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda E)(b) = 0 \quad b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

Def.  $\chi(\lambda) := \det(A - \lambda E)$  heißt das  
charakteristische Polynom von A.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc =$$
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4 \cdot (ad - bc)}}{2}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (a-\lambda)(e-\lambda)(i-\lambda) + \\ &+ fg + cdh - c(e-\lambda)g - ah(b-\lambda) \\ &- hf(a-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma \end{aligned}$$

~~$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a-\lambda & b & c & a-\lambda & b \\ d & e-\lambda & f & d & e-\lambda \\ g & h & i-\lambda & g & h \\ - & - & - & & \end{array}$$~~

3) Jede obere (untere) Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$

denn es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda) \cdots (\alpha_{nn} - \lambda)$$



## Berechnung von Eigenwerten u. Eigenvektoren.

1) Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$$

2) Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $A$

Löse das lineare Gleichungssystem.

$$(A - \lambda E)(b) = 0$$

Die Lösungen sind die Eigenvektoren von  $A$  bzgl. Eigenwert  $\lambda$ .