

# Anhang

## ① Algebren

Es sei  $(K, +, *)$  ein Körper.

Ein  $K$ -Vektorraum  $(V, +)$  heißt eine  $K$ -Algebra, wenn es eine bilineare Verknüpfung  $*$  :  $V \times V \rightarrow V$  gibt, d. h. es gelten

$$1) (x + y) * z = x * z + y * z,$$

$$2) x * (y + z) = x * y + x * z,$$

$$3) (ax) * z = a(x * z),$$

$$4) x * (by) = b(x * y)$$

für alle  $x, y, z$  aus  $V$  und  $a, b$  aus  $K$ .

Die  $K$ -Algebra heißt assoziativ, wenn die zweistellige Verknüpfung  $*$  assoziativ ist. Insbesondere ist  $V$  ein Ring.

Annahme: Sei  $\mathbb{R}^n$  eine  $\mathbb{R}$ -Algebra  
und  $e_1, \dots, e_n$  kanon. Basis des  $\mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$$

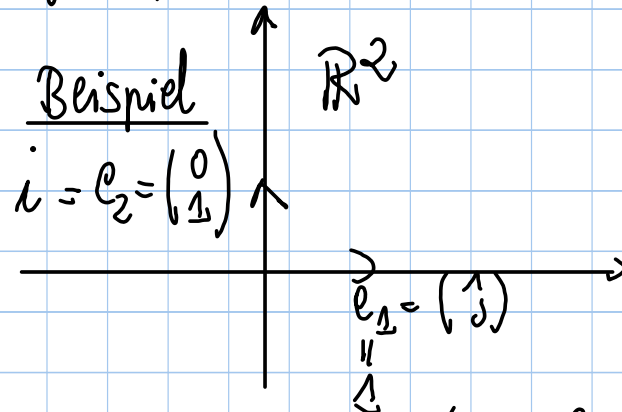
$$\begin{aligned} x * y &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \left( \sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \beta_k \boxed{e_i * e_k} \end{aligned}$$

Multipl. ist definiert durch  $e_i * e_j$

$$\begin{pmatrix} e_1 * e_1 & \dots & e_1 * e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n * e_1 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix}$$

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k, \text{ d.h.}$$

die Multiplikation ist durch  $n^3$ -Komplexelem.  $\gamma_{ijk}$ ,  
 $i, j, k = 1, \dots, n$  bestimmt.



$$\begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{pmatrix}$$

setzt man  $i := e_2$  und  $j := e_1$ , so gilt

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad x = \alpha e_1 + \beta e_2 = \alpha + \beta i$

# Definition

Eine Divisionsalgebra  $D$  ist eine nicht notwendigerweise assoziative Algebra, in der zu jedem  $a \in D$  und zu jedem  $b \in D, b \neq 0$  genau ein  $x \in D$  mit der Eigenschaft

$$a = x * b$$

existiert. (Dabei bezeichnet "\*" die Vektormultiplikation in der Algebra.)

Man fordert noch zur Vermeidung einer Trivialität, dass  $D$  mindestens zwei Elemente enthält.

Satz (1958; Milnor und Kervaire)

Eine Divisionsalgebra über den reellen Zahlen hat stets die Dimension 1, 2, 4 oder 8

(= Körper der reellen Zahlen, komplexen Zahlen, Quaternionen und Oktaven )

## 2) 2.1 Euklidischer Vektorraum

$$V \text{ über } \mathbb{R} \quad \sigma: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$1) \quad \forall_{x \in V} \quad \sigma(x, x) \geq 0 \quad \text{u.} \quad \sigma(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \quad \forall_{x, y \in V} \quad \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$

3)  $\sigma$  ist linear in jedem Argument.  
(bilinear)

$(V, \sigma)$  eukl. Vektorraum.

$$2.2. \quad \sigma: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

1) Es gibt eine Zerlegung  
 $V = V_+ + V_- =$

$\{x+y; x \in V_+ \text{ u. } y \in V_-\}$   
 in Unterräume  $V_+$  u.  $V_-$  von  $V$  mit  
 $\sigma(x,x) > 0$  für  $x \in V_+ \setminus \{0\}$   
 $\sigma(x,x) < 0$  für  $x \in V_- \setminus \{0\}$

$$2) \quad \sigma(x,y) = \sigma(y,x)$$

3)  $\sigma$  bilinear.

$(V, \sigma)$  Skalarraum und  
 $\sigma$  Skalarprodukt.

Spezialfall:  $V_- = \{0\} \Rightarrow (V, \sigma)$   
 Euklidisch.

Beispiel  $V = \mathbb{R}^4$   $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$   $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$

$$\sigma(x, y) = \langle x, y \rangle =$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

$(\mathbb{R}^4, \sigma)$  heißt Minkowski-Raum.

Beispiel  $X = \{0, 1\}^n = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\} \right\}$

Die Elemente von  $X$  heißen Codewörter

Seien  $a, b \in X$ . Dann ist eine Metrik def. durch

$d(a, b) :=$  Anzahl der verschiedenen Stellen von  $a$  und  $b$ .

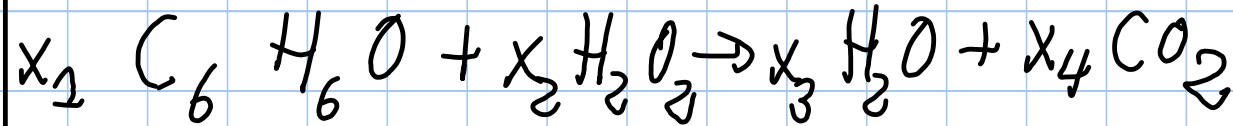
$d(a, b)$  heißt der Hammingabstand von  $a$  u.  $b$ .

$$d\left(\underbrace{(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)}_a, \underbrace{(1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)}_b\right) = 4.$$

### 3) chemie

Die Stöchiometrie ist eines der grundlegendsten und einfachsten mathematischen Hilfsmittel in der Chemie. Sie beruht auf dem Massenerhaltungssatz und beschäftigt sich mit der Frage, welche quantitativen Informationen aus einer Reaktionsgleichung gewonnen werden können. Der Begriff Stöchiometrie kommt aus dem Griechischen ("στοιχείον" = Grundstoff und "μετρειν" = messen).

Beispiel



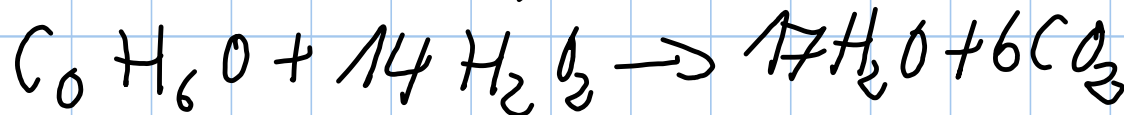
$$C: 6x_1 = x_4$$

$$H: 6x_1 + 2x_2 = 2x_3$$

$$O: x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4$$

} lineares  
Gleichungs-  
System

$$\text{mit } x_1 = 1 \Rightarrow x_4 = 6, x_3 = 17, x_2 = 14$$



# Analysis

Def. metrischer Raum,  $X \neq \emptyset$

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

$$M1) \forall_{x, y \in X} d(x, y) \geq 0 \text{ u. } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2) \forall_{x, y \in X} d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3) \forall_{x, y, z \in X} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



$(X, d)$  metrischer Raum.

Beisp-

1)  $X = \{0, 1\}^n$ ,  $d$  Hammingabstand  
 $(X, d)$  metr. Raum.

2)  $X = \mathbb{R}^n$

2.1)  $d(x, y) := \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$

2.2)  $d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$   
 $p \geq 1$



$$3) \quad X = C_0(I, \mathbb{R}) \quad I = [a, b]$$

$$3.1. \quad d(f, g) := \max_{x \in I} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

$$3.2. \quad d(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$$

$$4) \quad X \neq \emptyset \text{ beliebig}$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$5) \quad X = \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y|$$

Konvergente Folgen

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  <sup>\*)</sup> eine Folge von Elementen aus  $X$ .

$(a_n)$  heißt konvergent, falls es ein Element  $x \in X$  gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad d(a_n, x) < \varepsilon$$

$$*) \quad a: \mathbb{N} \longrightarrow X \quad n \mapsto a_n.$$

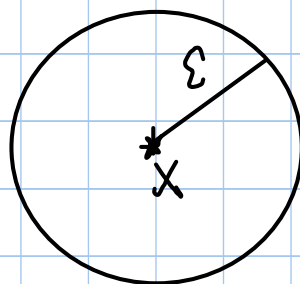
Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \Leftrightarrow \text{Def.}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad d(a_n, x) < \varepsilon$$

Def.

$$1) K(x, \varepsilon) := \{x' \in X; d(x, x') \leq \varepsilon\}$$

Kreis um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$ .



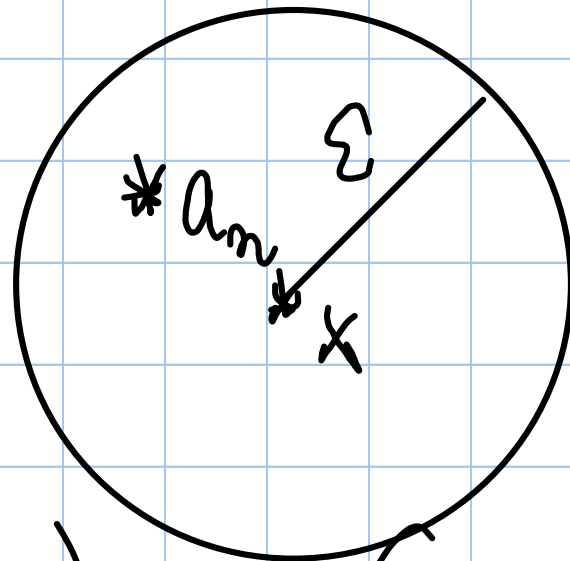
$$2) \text{Rand}(x, \varepsilon) := \{x' \in X; d(x, x') = \varepsilon\}$$

Rand des Kreises

3) Innere des Kreises

$$K_0(x, \varepsilon) := \{x' \in X; d(x, x') < \varepsilon\}$$

Interpretation "Konvergenz Folge"



$\forall \quad \exists \quad \forall$   
 $\varepsilon > 0 \quad n_0(\varepsilon) \quad n \geq n_0(\varepsilon)$

$$d(a_n, x) < \varepsilon$$

Def.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy Folge  $\Leftrightarrow$

$\forall \quad \exists \quad \forall$   
 $\varepsilon > 0 \quad n_0(\varepsilon) \quad n, m \geq n_0(\varepsilon)$

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$