

Anhang

W

① Algebren

Es sei $(K, +, *)$ ein Körper.

Ein K -Vektorraum $(V, +)$ heißt eine **K-Algebra**, wenn es eine **bilineare** Verknüpfung $*$: $V \times V \rightarrow V$ gibt, d. h. es gelten

- 1) $(x + y) * z = x * z + y * z$,
- 2) $x * (y + z) = x * y + x * z$,
- 3) $(ax) * z = a(x * z)$,
- 4) $x * (by) = b(x * y)$

für alle x, y, z aus V und a, b aus K .

Die K -Algebra heißt **assoziativ**, wenn die zweistellige Verknüpfung $*$ assoziativ ist. Insbesondere ist V ein Ring.

Annahme: Sei \mathbb{R}^n eine \mathbb{R} -Algebra
und e_1, \dots, e_n kanon. Basis des \mathbb{R}^n

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$$
$$x * y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k e_k \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \beta_k \boxed{e_i * e_k}$$

Multipl. ist definiert durch $e_i * e_j$ (W)

$$\begin{pmatrix} e_1 * e_1 & \dots & e_1 * e_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n * e_1 & \dots & e_n * e_n \end{pmatrix}$$

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k, \text{ d.h.}$$

die Multiplikation ist durch n^3 Körperelemente γ_{ijk} ,
 $i, j, k = 1, \dots, n$ bestimmt.

$$i = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 * e_1 & e_1 * e_2 \\ e_2 * e_1 & e_2 * e_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

setzt man $i := e_2$ und $1 := e_1$, so gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}_2 \quad x = \alpha e_1 + \beta e_2 = \alpha + \beta i$$



Definition

Eine Divisionsalgebra D ist eine nicht notwendigerweise assoziative Algebra, in der zu jedem $a \in D$ und zu jedem $b \in D, b \neq 0$ genau ein $x \in D$ mit der Eigenschaft

$$a = x * b$$

existiert. (Dabei bezeichnet "*" die Vektormultiplikation in der Algebra.)

Man fordert noch zur Vermeidung einer Trivialität, dass D mindestens zwei Elemente enthält.

Satz (1958; Milnor und Kervaire)

Eine Divisionsalgebra über den reellen Zahlen hat stets die Dimension 1, 2, 4 oder 8

(= Körper der reellen Zahlen, komplexen Zahlen, Quaternionen und Oktaven)

Metrische Räume

Beispiele

$$1) \mathbb{R}^n \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

$$\text{allgfm. } d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$$

$$n=1 \quad d(x, y) = |x - y|$$

$$2) C_0(I, \mathbb{R}) \quad I = [a, b]$$

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

Konvergente Folgen

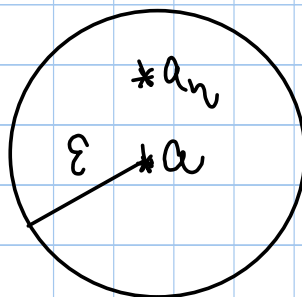
(M, d) metr. Raum $a_n \in M, n \in \mathbb{N}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent $\Leftrightarrow \exists \exists a \in M.$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0 \quad d(a_n, a) < \varepsilon$$

$$\varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



$$n \geq n_0$$

$$a_1$$

$$a_{n_0-1}$$

Def. Cauchy-Folge

(M, d) metr. Raum $a_n \in M, n \in \mathbb{N}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Satz Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge

Beweis ggs $\varepsilon > 0$ u. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow$

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon/2) \quad \forall n \geq n_0 \quad d(a_n, a) < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\forall n, m \geq n_0 \quad d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \\ = d(a_n, a) + d(a_m, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. \square

Def. Ein metrischer Raum heißt
vollständig \Leftrightarrow Jede Cauchy-Folge
ist konvergent.

Definition

Ein Vektorraum V über den reellen Zahlen (oder den komplexen Zahlen) heißt ein normierter Vektorraum oder kürzer normierter Raum, wenn es eine Abbildung

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

- i. $\|a\| > 0$ für alle $a \neq 0$
- ii. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a \in V$ (Homogenität)
- iii. $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ für alle $a, b \in V$

$d(a, b) := \|a - b\|$ definiert eine Metrik auf V , d.h. jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum

Definition Banachraum

Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum (benannt nach dem Mathematiker Stefan Banach).

\mathbb{R}^n mit der p -Norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$

wobei $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Diese Norm geht für $p \rightarrow \infty$ in die die Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$ über.

Weitere Spezialfälle der p -Norm sind

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i| \quad \text{die Summennorm und}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \quad \text{die euklidische Norm.}$$

Stetige Funktionen

Sei $C([a, b])$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Mit $\|f\| := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ definieren wir eine Norm (Rechtfertigung

$C([a, b])$ ist ein Banachraum

Polynome

Der Funktionenraum der Polynome $\mathcal{P} := \{p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ ist Polynom}\} \subset C([a, b])$ mit der Norm $\|p\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$ ist nicht vollständig.

Beweis

Wir wissen $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$. Daraus folgt, die Folge

$(p_n)_n$ mit $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{P}$ ist eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$ ist.

Angenommen $\exists p \in \mathcal{P}$ mit $\|p_n - p\| \rightarrow 0 \Rightarrow |p(x) - e^x|$

$$\leq \|p(x) - p_n(x)\|_{\infty} + \|p_n(x) - e^x\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist $p(x) = e^x$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme steht, da die Exponentialfunktion kein Polynom ist $e^x \notin \mathcal{P}$.

Anwendungen: Fixpunkte u. Iterationsverf.

geg. $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und

Abb. $f: I \longrightarrow I$

Def. $x^* \in I$ heißt ein Fixpunkt von f \Leftrightarrow
 $f(x^*) = x^*$

Beispiele

1) $g(x) = 0$

Sei $f(x) := x + g(x)$

$$f(x^*) = x^* \Leftrightarrow$$

$$g(x^*) = 0$$

$$\text{Beweis } \Rightarrow f(x^*) = x^* + g(x^*) = x^* \Rightarrow$$

$$g(x^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^*$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & h(x) = b \\
 & g(x) := h(x) - b = 0 \\
 & f(x) := x + h(x) - b \\
 & f(x^*) = x^* \iff h(x^*) = b.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & h(x) = g(x) \\
 & h(x) - g(x) = 0 \\
 & f(x) := x + h(x) - g(x) \\
 & f(x^*) = x^* \iff h(x^*) = g(x^*)
 \end{aligned}$$

Verallgemeinerung. $f(x) := x + l(x)(h(x) - g(x))$
 hiermit gilt mit $l(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$

$$f(x^*) = x^* \iff h(x^*) = g(x^*)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis } \Rightarrow: \quad & f(x^*) = x^* \Rightarrow l(x^*)(h(x^*) - g(x^*)) = 0 \\
 & \Rightarrow h(x^*) - g(x^*) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Bemerkung $g(x) = h(x)$

Spezialfall $h(x) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$

Bezeichnung wie oben

Ziel: Konstruktion einer konvergenten Folge

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ u.

$$f(x^*) = x^*$$

$x_0 \in [a, b]$ beliebig.

$$x_1 := f(x_0)$$

\vdots

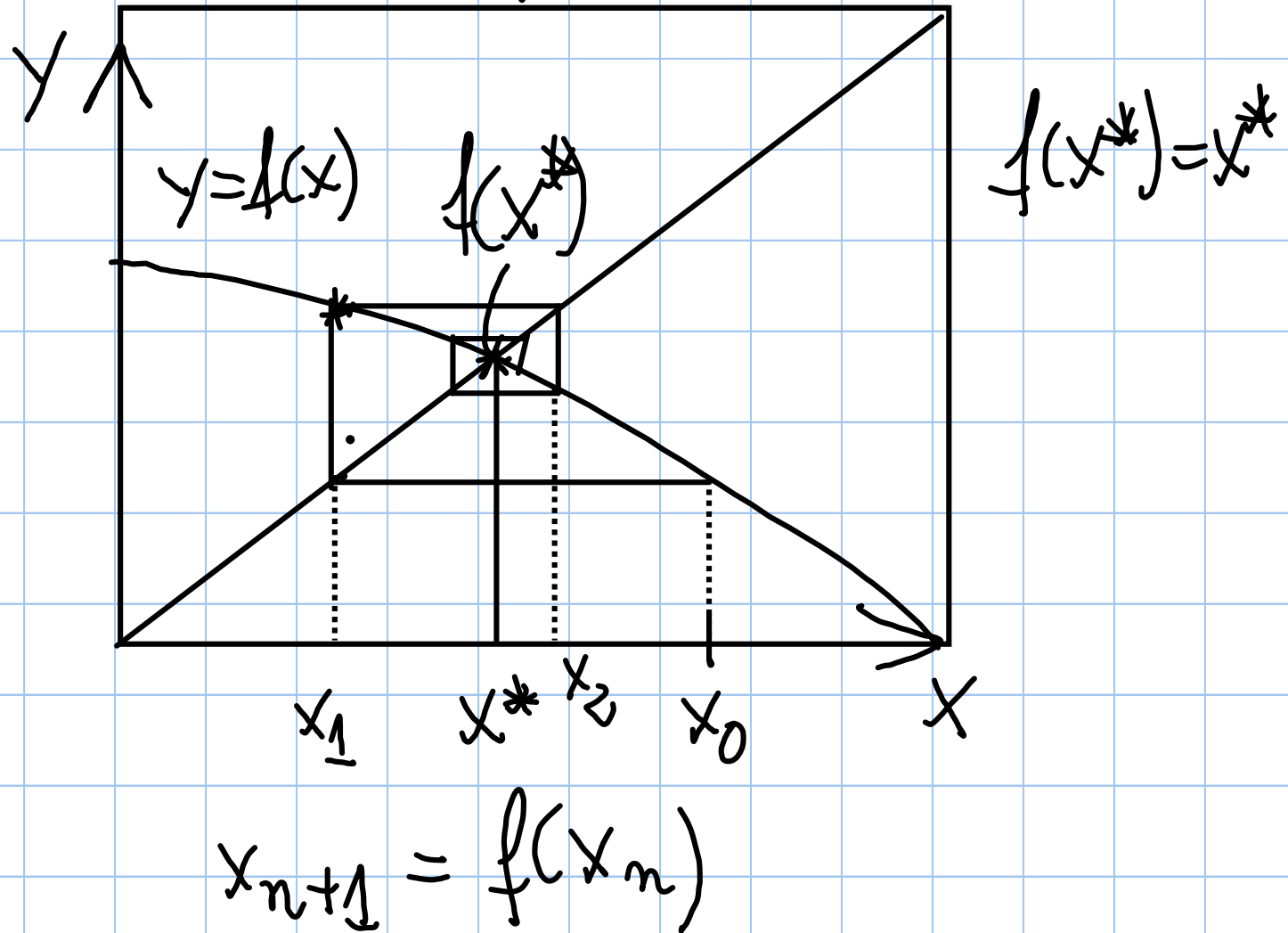
allgemein $x_{n+1} := f(x_n)$

*)

falls f Lipschitz-beschränkt ist.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Geometrische Interpretation



Mathematische Formulierung: Gesucht sind Näherungslösungen der Gleichung

$$h(x)=g(x)$$

durch Verwendung des allgemeinen Iterationsverfahrens:

$$\text{mit } f(x) := h(x)-g(x) + x = x.$$

Maple-Befehl: Maple-Befehlsfolge.

Parameter: eq: Gleichung der Form

$$h(x)=g(x)$$

x: Variable der Gleichung nach der aufgelöst werden soll

x[0]: Startwert für die Iteration

N: Anzahl der Iterationsschritte

Beispiel: $\sqrt{x^3} - 3x^2 = -0.5$

```
> restart:
> eq := sqrt(x^3) - 3*x^2 = -0.5; #zu lösende Gleichung
> x[0] := 0.; #Startwert der Iteration
> N := 10; #Anzahl der Iterationen
> f:= unapply(lhs(eq)-rhs(eq)+x, x):
> for i from 1 to N
> do
>   x[i]:=evalf(f(x[i-1])):
>   print(`Die Iterationslösung lautet nach `, i, `Iterationen `,x[i]);
> od:
```

Die Iterationslösung lautet nach , 1, Iterationen , .5
Die Iterationslösung lautet nach , 2, Iterationen , .6035533906
Die Iterationslösung lautet nach , 3, Iterationen , .4796160798
Die Iterationslösung lautet nach , 4, Iterationen , .6216761811
Die Iterationslösung lautet nach , 5, Iterationen , .4524019243
Die Iterationslösung lautet nach , 6, Iterationen , .6426887099
Die Iterationslösung lautet nach , 7, Iterationen , .4187722151
Die Iterationslösung lautet nach , 8, Iterationen , .6636601495
Die Iterationslösung lautet nach , 9, Iterationen , .3829787596
Die Iterationslösung lautet nach , 10, Iterationen , .6799680376

```

> restart:
> eq:=0.5+0.2*sin(x)=x;      #zu lösende Gleichung
x[0] := 3.;                  #Startwert der Iteration
N := 10;                     #Anzahl der Iterationen

                                eq := .5 + .2 sin(x) = x
                                x0 := 3.
                                N := 10

> f:= unapply(lhs(eq)-rhs(eq)+x, x):
> for i from 1 to N
> do
>   x[i]:=evalf(f(x[i-1])):
>   print(`Die Iterationslösung lautet nach `, i, `Iterationen `,x[i]);
> od:

```

```

Die Iterationslösung lautet nach , 1, Iterationen , .5282240016
Die Iterationslösung lautet nach , 2, Iterationen , .6008000402
Die Iterationslösung lautet nach , 3, Iterationen , .6130605189
Die Iterationslösung lautet nach , 4, Iterationen , .6150746643
Die Iterationslösung lautet nach , 5, Iterationen , .6154039009
Die Iterationslösung lautet nach , 6, Iterationen , .6154576741
Die Iterationslösung lautet nach , 7, Iterationen , .6154664556
Die Iterationslösung lautet nach , 8, Iterationen , .6154678896
Die Iterationslösung lautet nach , 9, Iterationen , .6154681238
Die Iterationslösung lautet nach , 10, Iterationen , .6154681620

```


Iterative Verfahren für nichtlineare Gleichungen: Regula falsi

Mathematische Formulierung: Gesucht sind Näherungslösungen der Gleichung

$$h(x)=g(x)$$

durch Verwendung der regula falsi:

$$x_i := x_i - \frac{f(x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$$

>

mit $f(x) := h(x) - g(x)$

Maple-Befehl: Maple-Befehlsfolge.

Parameter: eq: Gleichung der Form $h(x)=g(x)$
x: Variable der Gleichung nach der aufgelöst werden soll
x[0], x[1]: Startwerte für die Iteration
N: Anzahl der Iterationsschritte

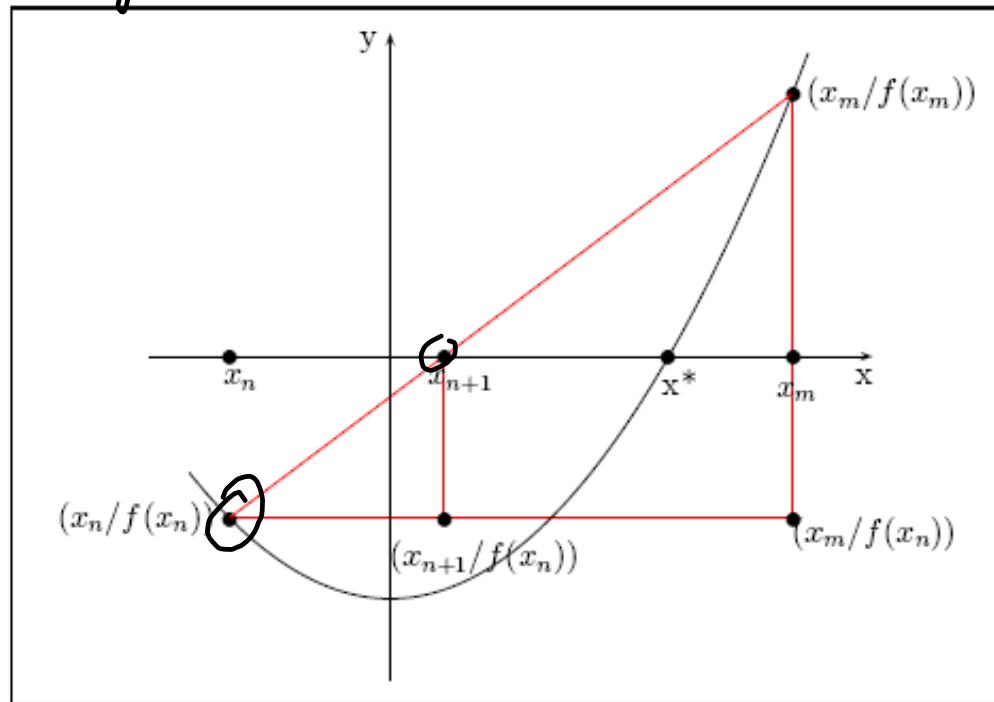
Beispiel: $x^2 - 2 = 0$

```
> restart;  
> eq := x^2 - 2 = 0;      #zu lösende Gleichung  
> x[0] := 1.5;  
> x[1] := 1.7;           #Startwerte der Iteration  
> N := 3;                #Maximale Anzahl der Iterationen  
> f:= unapply(lhs(eq)-rhs(eq), x):  
> i:=1:  
> while abs(f(x[i]))>10^(-9) and i<N  
> do  
>   i:=i+1:  
>   x[i]:=x[i-2] - evalf(f(x[i-2])*(x[i-1]-x[i-2])/(f(x[i-1])-f(x[i-2]))):  
>   print(`Die Iterationslösung lautet nach `, i, `Iterationen `,x[i]);  
> od:
```

Die Iterationslösung lautet nach , 2, Iterationen , 1.421875000

Die Iterationslösung lautet nach , 3, Iterationen , 1.414914915

Regula falsi



$$\frac{f(x_m) - f(x_n)}{x_m - x_n} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{(x_m - x_n)}{f(x_m) - f(x_n)}$$
$$m = n - 1.$$

Regula Falsi

weiteres Beispiel $> 0.5 + 0.2 \cdot \sin(x) = x$

```
> restart:
> eq:=0.5+0.2*sin(x)=x;           #zu lösende Gleichung
x[0] := 1.;
x[1] := 1.4;                       #Startwerte der Iteration
N := 10;                           #Maximale Anzahl der Iterationen
> f:= unapply(lhs(eq)-rhs(eq), x):
> i:=1:
> while abs(f(x[i]))>10^(-9) and i<N
> do
>   i:=i+1:
>   x[i]:=x[i-2] - evalf(f(x[i-2])*(x[i-1]-x[i-2])/(f(x[i-1])-f(x[i-2]))):
>   print(`Die Iterationslösung lautet nach `, i, `Iterationen `,x[i]);
> od:
```

Die Iterationslösung lautet nach , 2, Iterationen , .6425624953

Die Iterationslösung lautet nach , 3, Iterationen , .6172706131

Die Iterationslösung lautet nach , 4, Iterationen , .6154715781

Die Iterationslösung lautet nach , 5, Iterationen , .6154681699