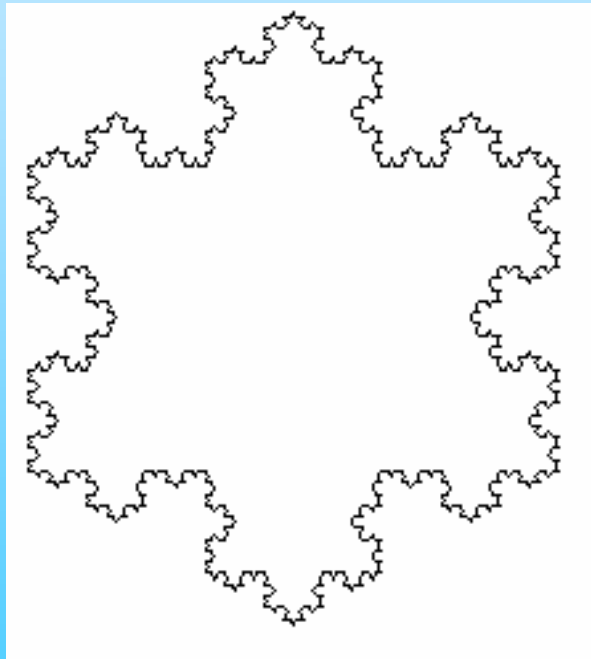


Fraktale

Die Koch Schneeflocke

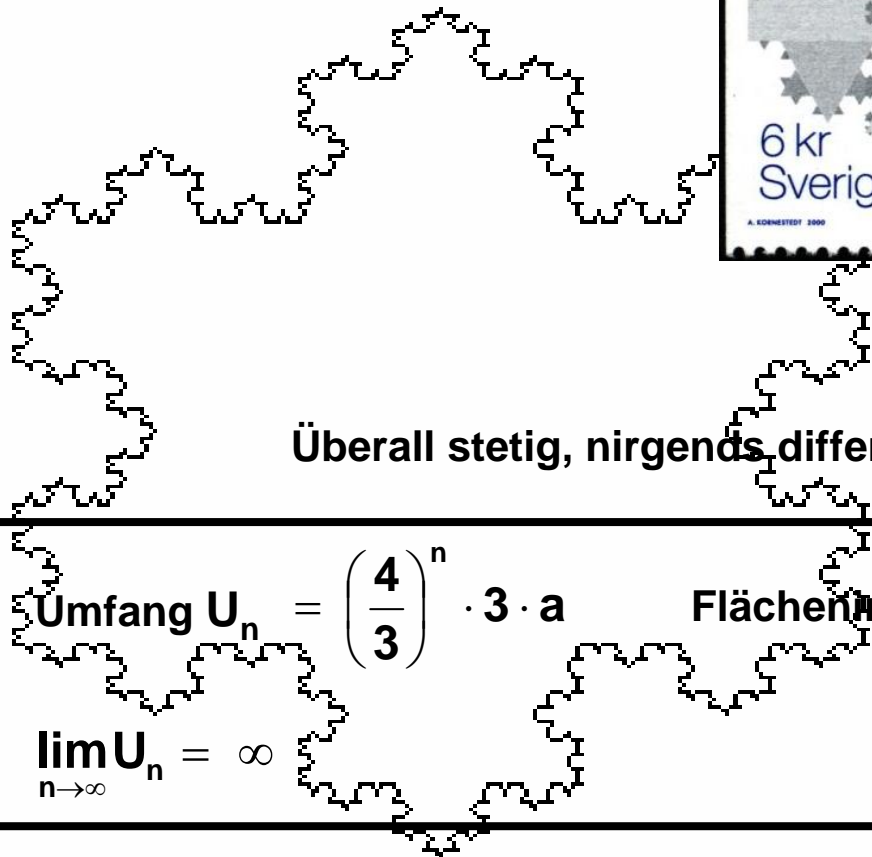


Schneeflockenkurve oder Kochsche Kurve

nach H. Koch (1904)



Helge von Koch 1870 - 1924



Schweden 2000

Überall stetig, nirgends differenzierbar

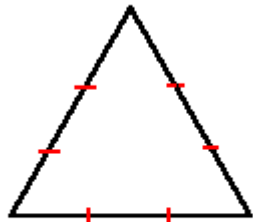
$$\text{Umfang } U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3 \cdot a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$$

$$\text{Flächeninhalt } A_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \right) \cdot a^2$$

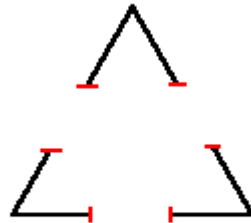
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$$

Bild 1



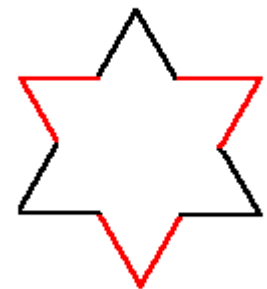
Gleichseitiges Dreieck mit
dreigeteilten Seiten

Bild 2



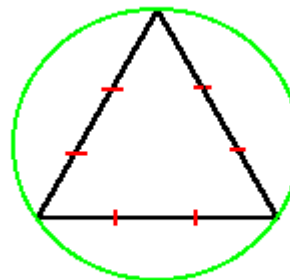
Entfernen der Mittelstücke

Bild 3



Ersetzen der Mittelstücke

Bild 4



Die Fläche des Dreieckes wird
nie größer als die des Kreises.

Länge der Kurve:

Zahl der
Teilstücke

*

Skalierungs-
faktor

Ursprünglich:

1

*

1

1. Iteration:

4

*

$1/3$

2. Iteration:

$4 \cdot 4$

*

$1/3 \cdot 1/3$

n. Iteration:

4^n

*

$(1/3)^n$

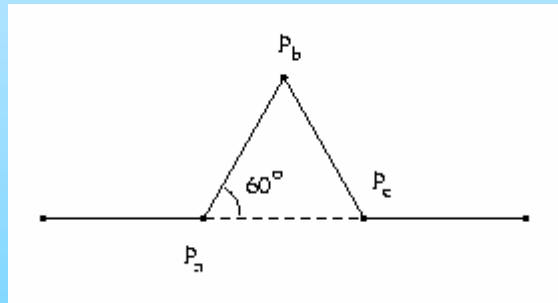


Die Koch Schneeflocke



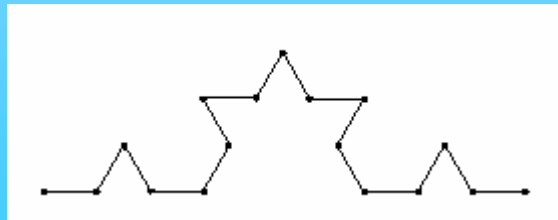
$$L\ddot{a}nge = 1$$

Erste Iteration

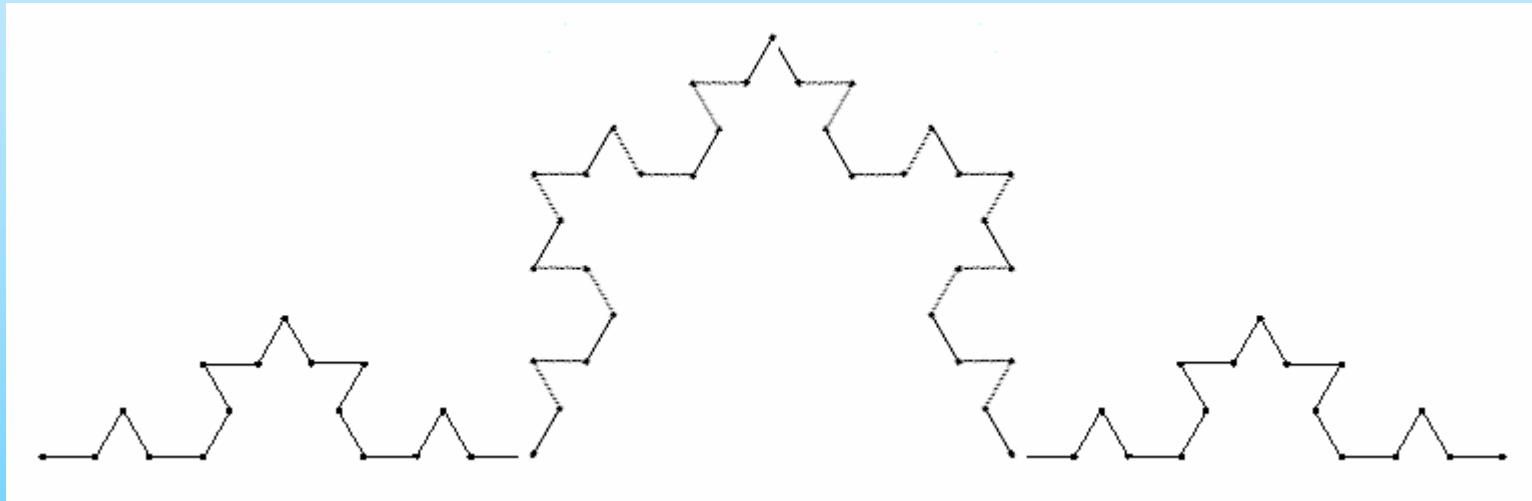


$$L\ddot{a}nge = \frac{4}{3}$$

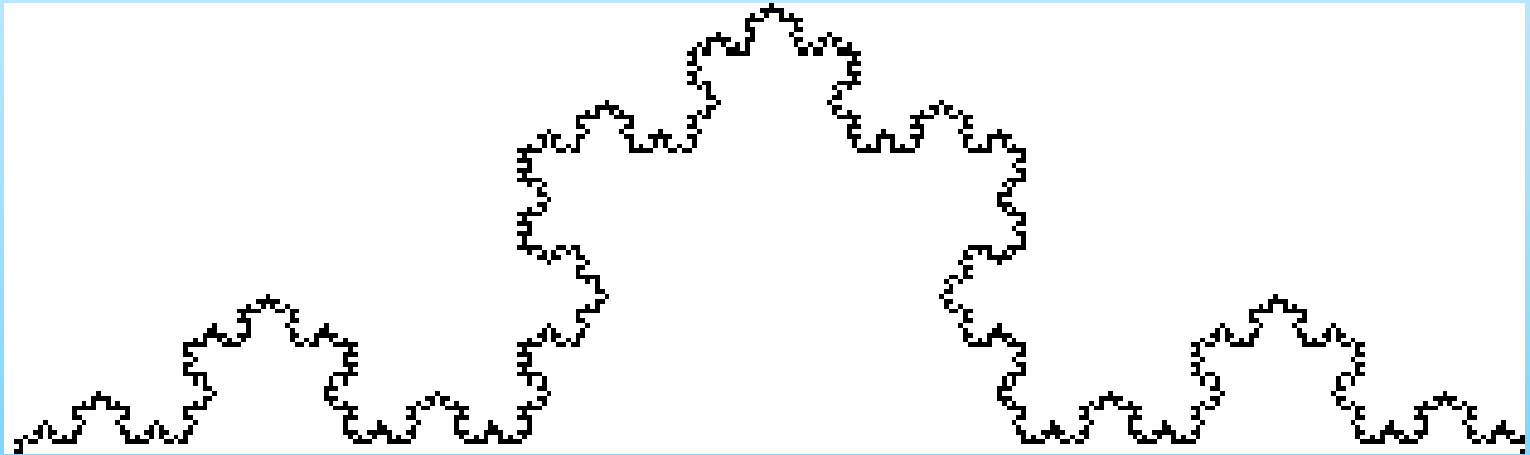
Nach
2 Iterationen



$$L\ddot{a}nge = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

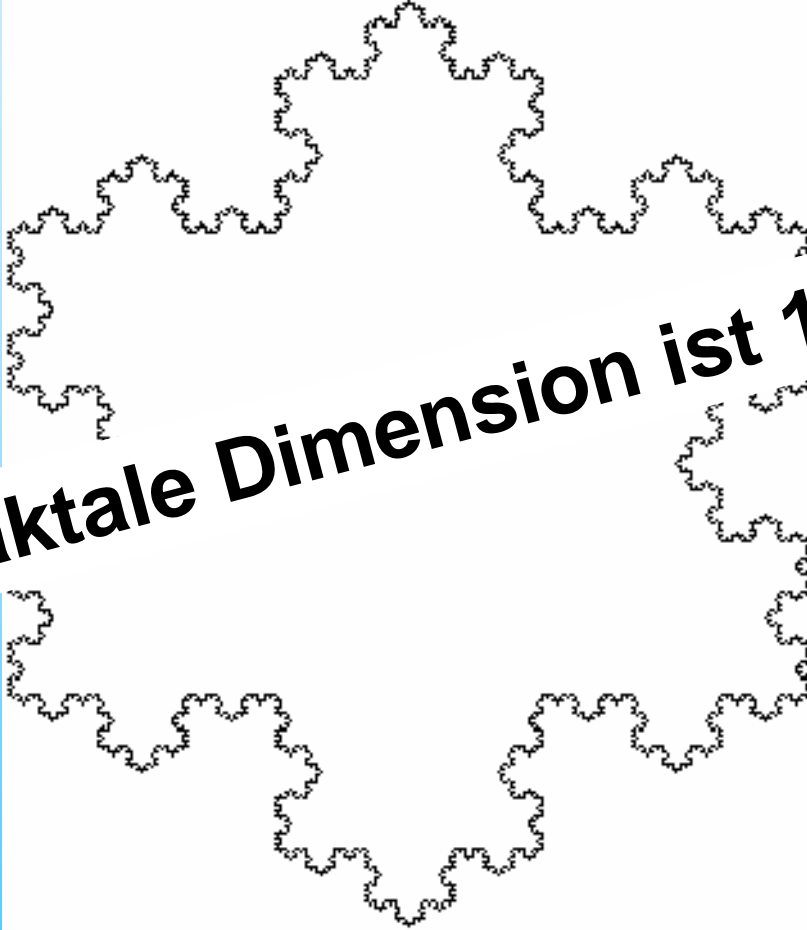


$$Länge = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$



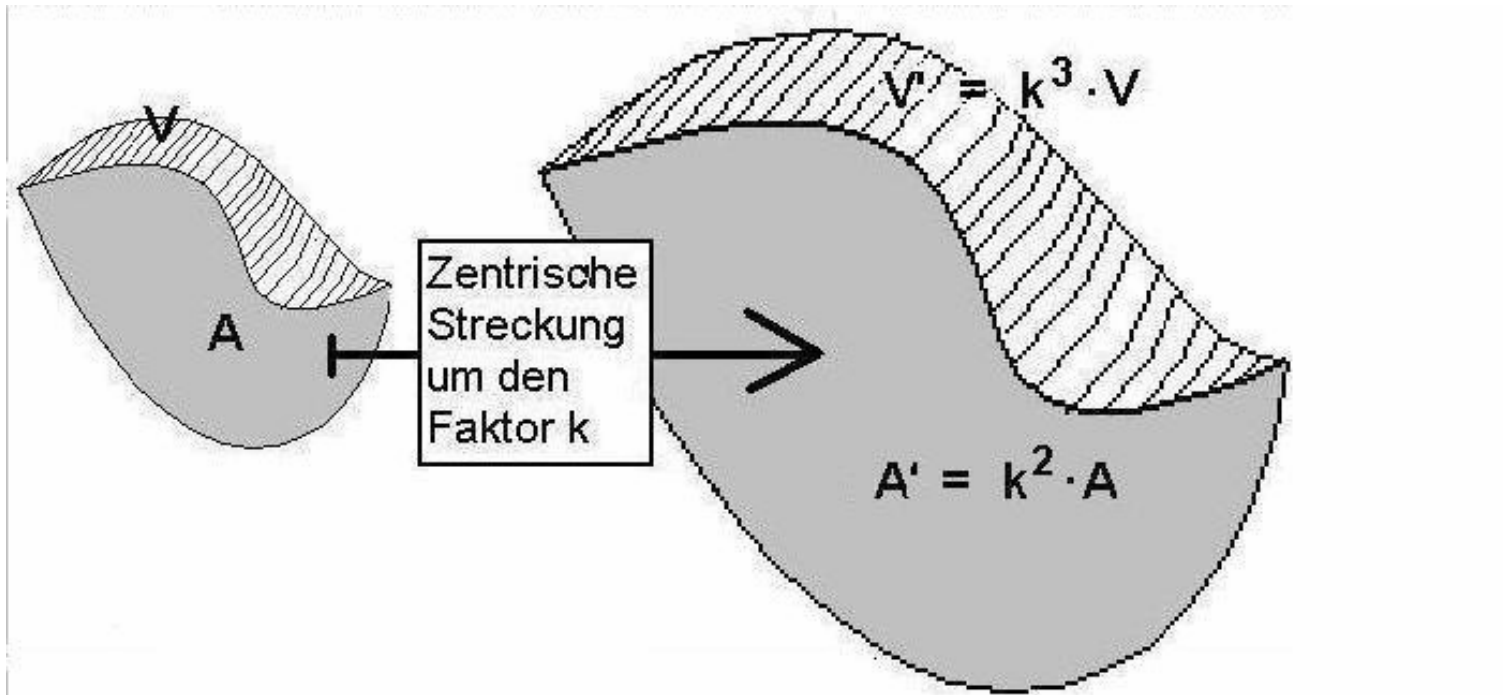
$$Länge = \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

Der Umfang der Koch Schneeflocke ist unendlich . . .



Die fraktale Dimension ist 1.261859507

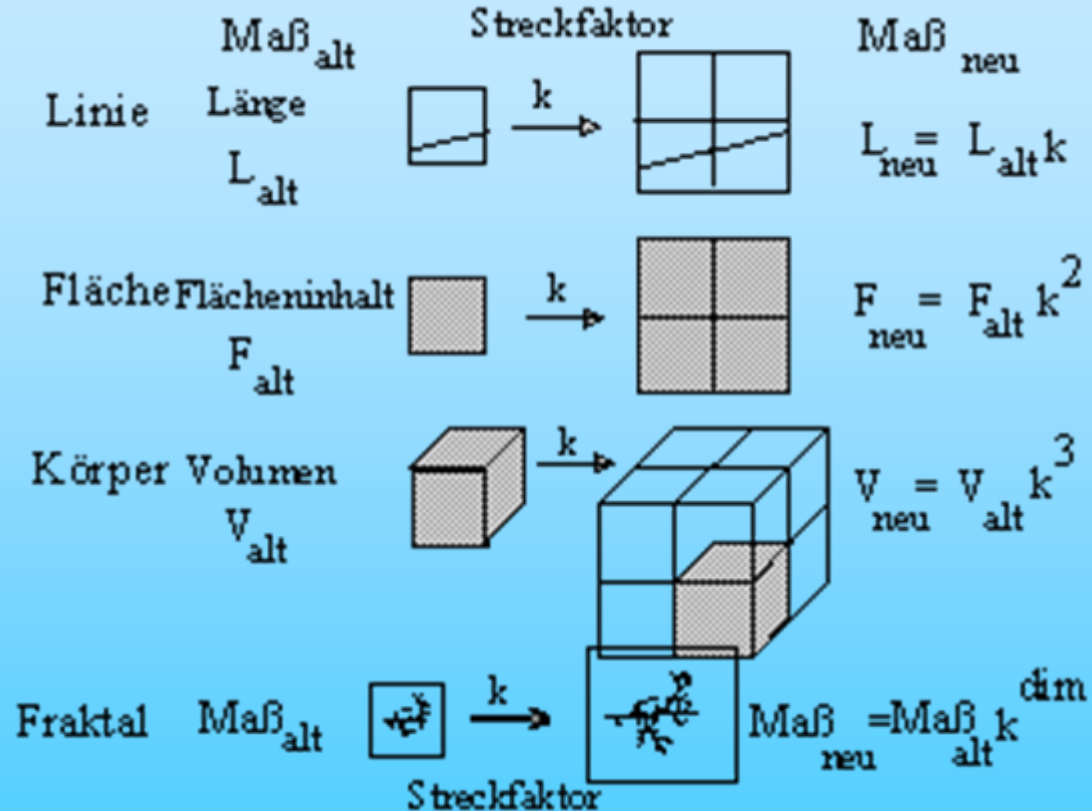
. . . Der Flächeninhalt aber ist endlich !!!



Streckungsfaktor k :

Flächen: $A_{\text{alt}} \rightarrow k^2 A_{\text{alt}} = A_{\text{neu}}$

Volumina: $V_{\text{alt}} \rightarrow k^3 V_{\text{alt}} = V_{\text{neu}}$



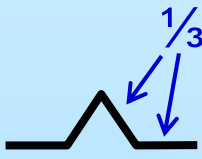
Allgemein: $Maß_{neu} = Maß_{alt} k^{dim}$

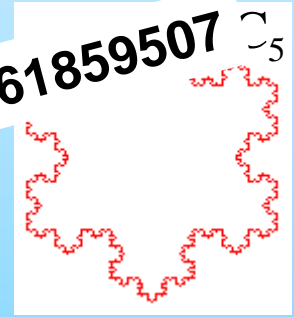
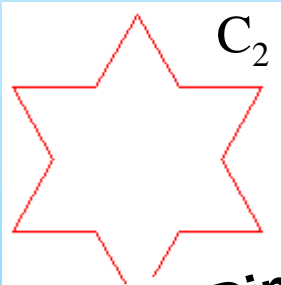
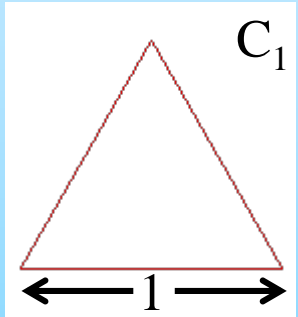
Definition: Ein selbstähnliches Objekt hat **Dimension D** , falls es in N identische Kopien unterteilt werden kann, die jeweils skaliert sind mit dem Faktor $r = 1/N^{1/D}$.

Beispiel:

Linie hat Dimension 1, denn sie besteht aus N Stücken der Größe $1/N$.
Quadratische Fläche hat Dimension 2, denn sie besteht aus N Flächen der Größe $r = 1/N^{1/2}$. Sind N und r bekannt, lässt sich D bestimmen:

$$r = \frac{1}{N^{1/D}} \Rightarrow r \cdot N^{1/D} = 1 \Rightarrow N^{1/D} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{D} \cdot \log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Beispiel: Koch-Kurven: Ersetze $\overset{1}{\rule{1cm}{0.4pt}}$ durch  ad Infinitum



Die fraktale Dimension der Koch-Kurve ist 1.261859507 ...

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$$

$$r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}} \Rightarrow r \cdot N^{\frac{1}{D}} = 1 \Rightarrow N^{\frac{1}{D}} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{D} \cdot \log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Koch-Kurven: $r=1/3$ und $N=4$



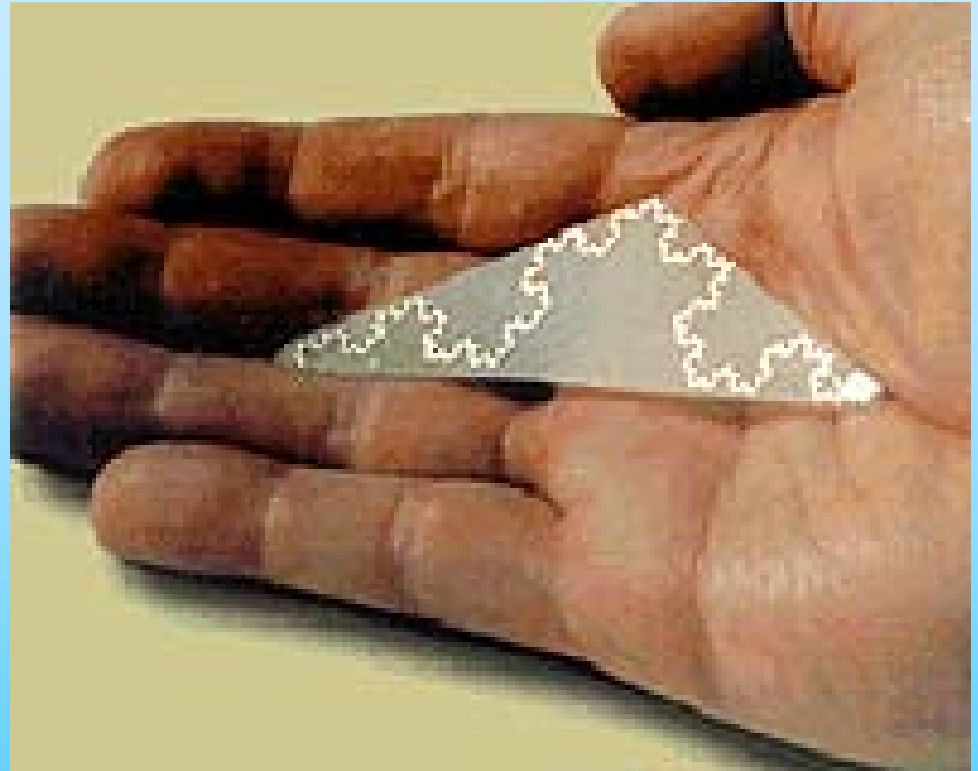
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$$

Die Koch Schneeflocke in der Technik

Fractal Tiling Arrays -- Firm Reports Breakthrough in Array Antennas

Boston - Mar 13, 2002

Fractal Antenna Systems, Inc. today disclosed that it has filed for patent protection on a new class of antenna arrays that use close-packed arrangements of fractal elements to get superior performance characteristics.



Praktischer Nutzen von Fraktalen

Computer systems (**Fractal archivation, picture compressing without pixelization**)

Liquid mechanics

- **Modulating of turbulent stream**
- **Modulating of tongues of flame**
- **Porous material has fractal structure**

Telecommunications (**antennas have fractal form**)

Surface physics (**for description of surface curvature**)

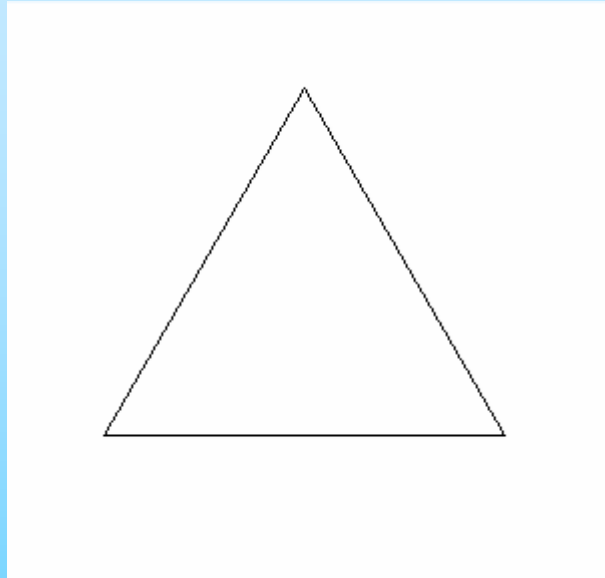
Medicine

- **Biosensor interaction**
- **Heart beating**

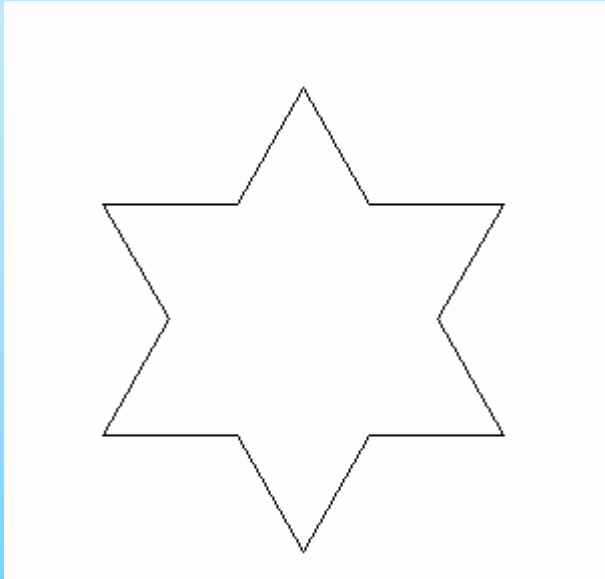
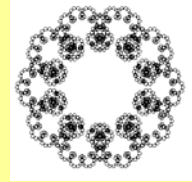
Biology (**description of population model**)

Fraktale

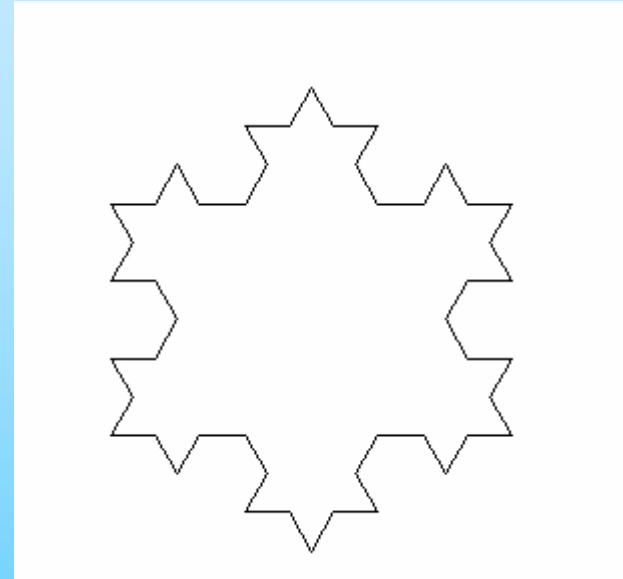
Initialproblem: **Fläche**



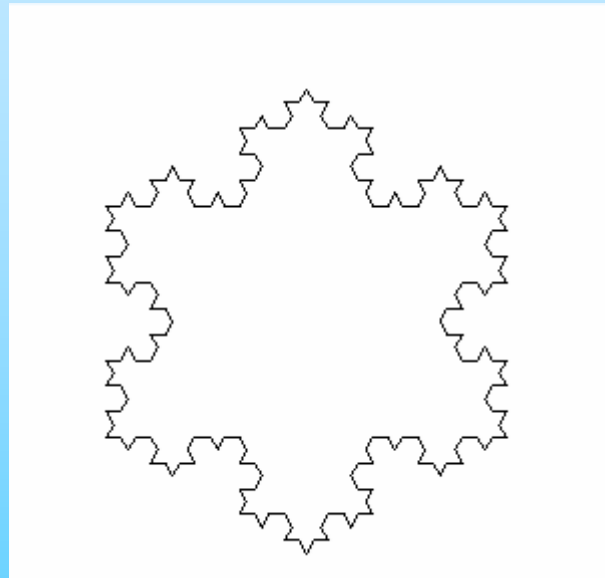
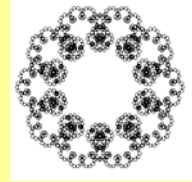
Flächeninhalt $A_0 = A_0$



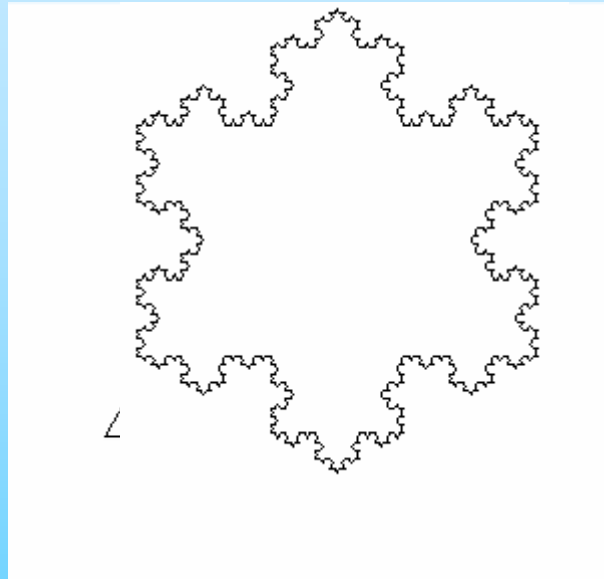
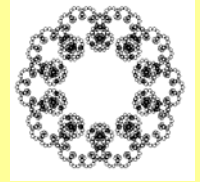
$$\text{Flächeninhalt } A_1 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$$



$$\text{Flächeninhalt } A_2 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(1 + \left(\frac{4}{9} \right) \right)$$



$$\text{Flächeninhalt } A_3 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(1 + \left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{4}{9} \right)^2 \right)$$



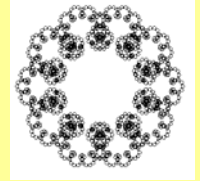
$$\text{Flächeninhalt } A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(1 + \left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right) \cdot a^2$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$$

Mandelbrot

Fraktale

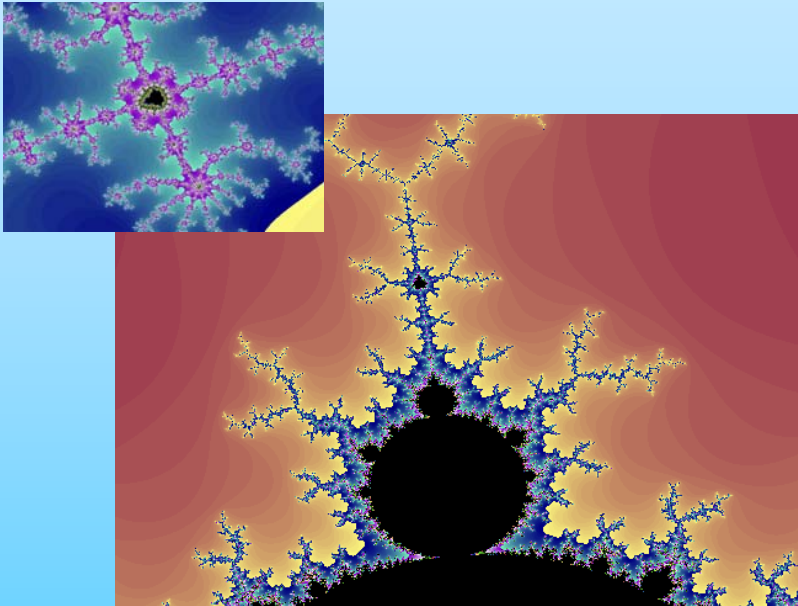


Mandelbrotmenge

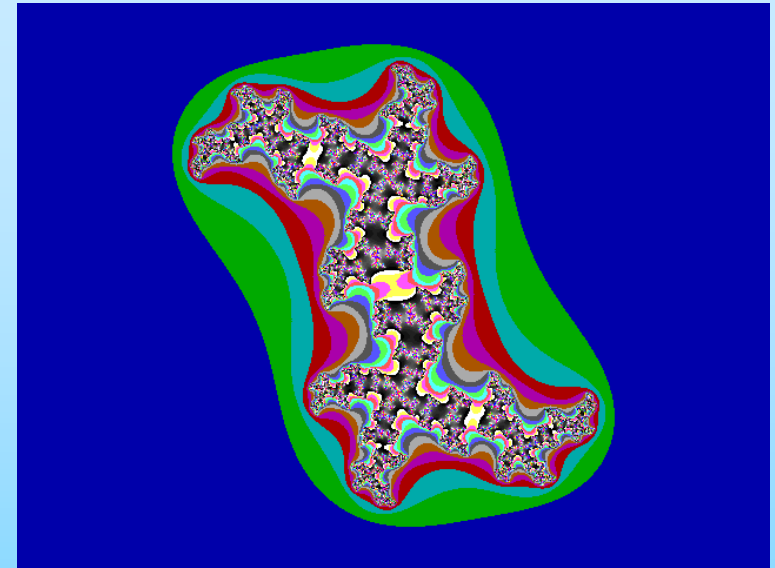


Benoît B. Mandelbrot

1. Was sind Fraktale?



Mandelbrotmenge



Juliamenge

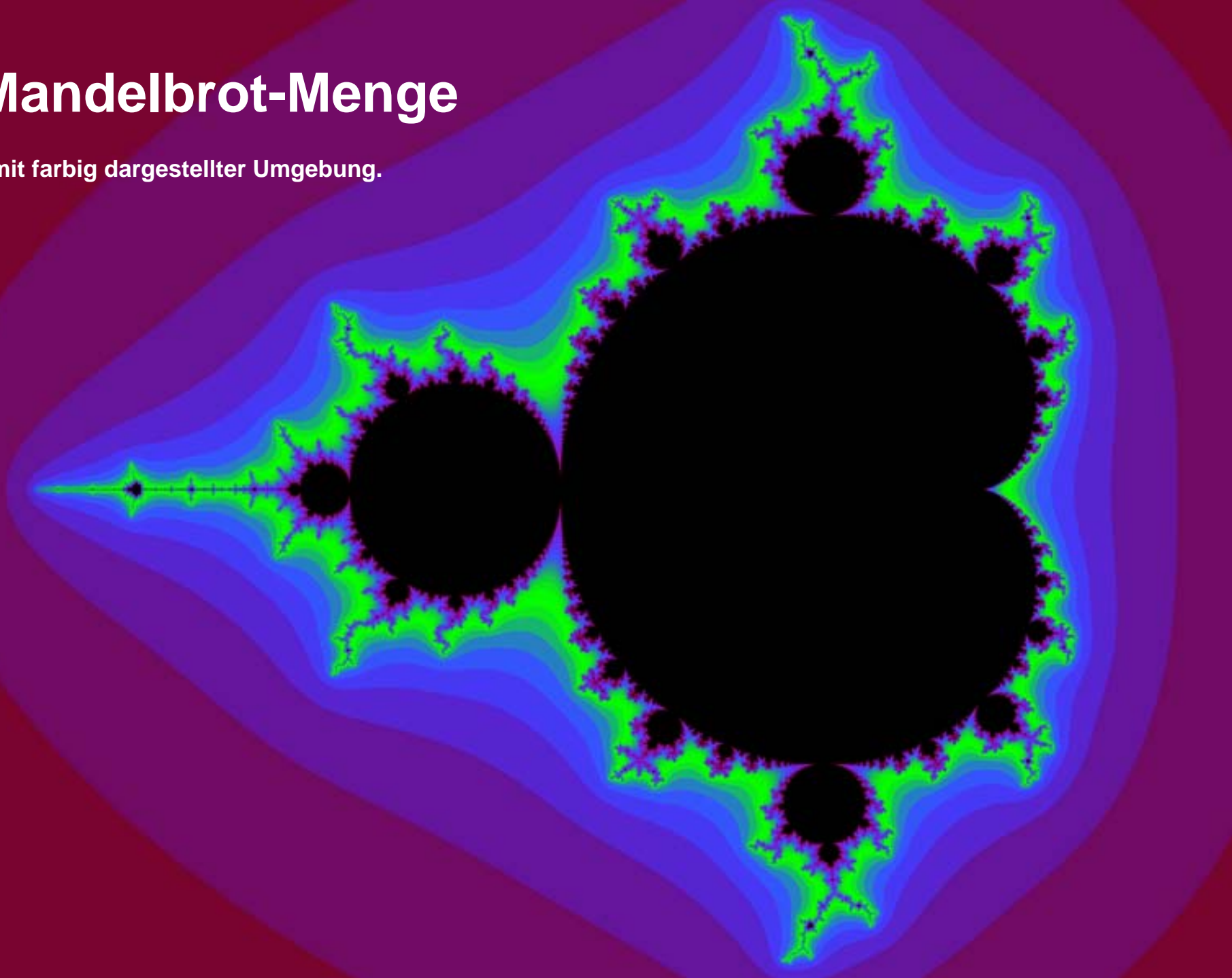
$$z_{n+1} = z_n^2 + c = f(z_n)$$

Benoit Mandelbrot:

Ein fragmentiertes geometrisches Gebilde, das in Teile zerlegt werden kann, die (nahezu) eine kleine Kopie des ganzen Gebildes sind.

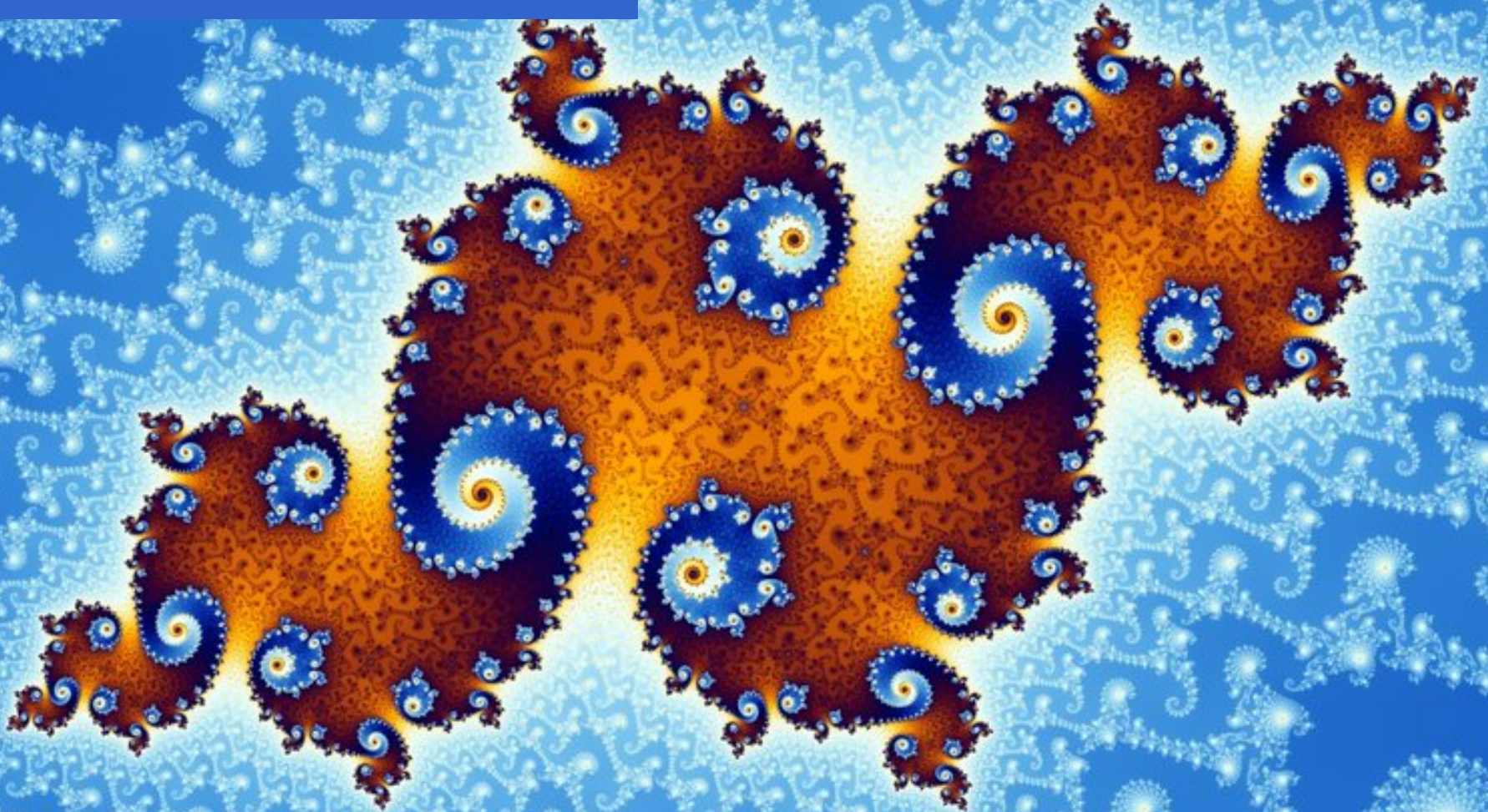
Mandelbrot-Menge

mit farbig dargestellter Umgebung.



Detail

am Rand der Mandelbrotmenge



1 Mandelbrotmenge

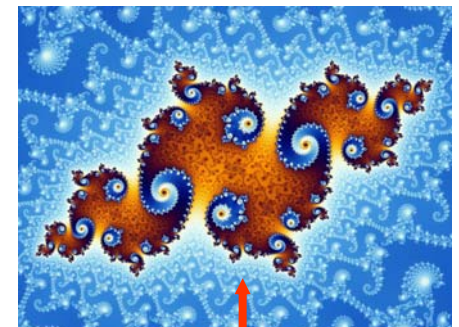
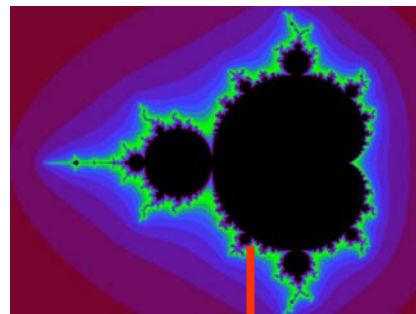
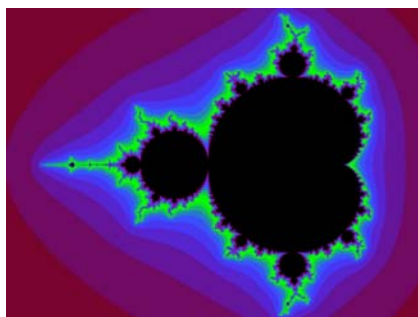
Eine komplexe Zahl c gehört zur Mandelbrotmenge, wenn die rekursive Folge¹

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0 \quad (c, z_i \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

nicht divergiert. Wir betrachten die Folge als nicht divergent, solange nach einer willkürlichen Anzahl Iterationen² für den Betrag der komplexen Zahl gilt³:

$$2 > |z_i| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_i)^2 + \operatorname{Im}(z_i)^2} \quad (2)$$

Die Mandelbrotmenge erscheint auf dem Bildschirm als „Apfelmännchen“, wenn man für jeden (als Pixel sichtbaren) Punkt c der Gaußschen Zahlenebene⁴ die Folge (1) iteriert⁵ und einen Pixel setzt, wenn sie nicht divergiert (1. Bild). Ein besseres Ergebnis erhält man, wenn gezählt wird, nach wie vielen Iterationen der Betrag größer als 2 wurde und dieser Wert in Grau- oder Farbabstufungen übersetzt wird (2. Bild).



Ausschnittvergrößerung

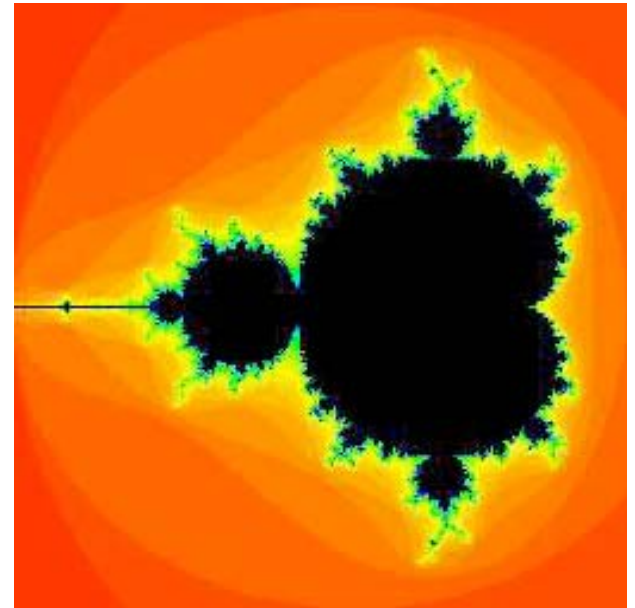
Mandelbrot-Menge

- Mandelbrot-Menge
- Wahl einer komplexen Zahl c
- Folge z_n

$$z_0 = 0 \quad (\text{Startwert})$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (\text{Rekursion})$$

- Konvergiert die Folge?
- Wenn ja, gehört c zur Mandelbrot-Menge



Die Iteration bleibt gleich: $z_0 = c$; $z_1 = z_0^2 + c$; ...

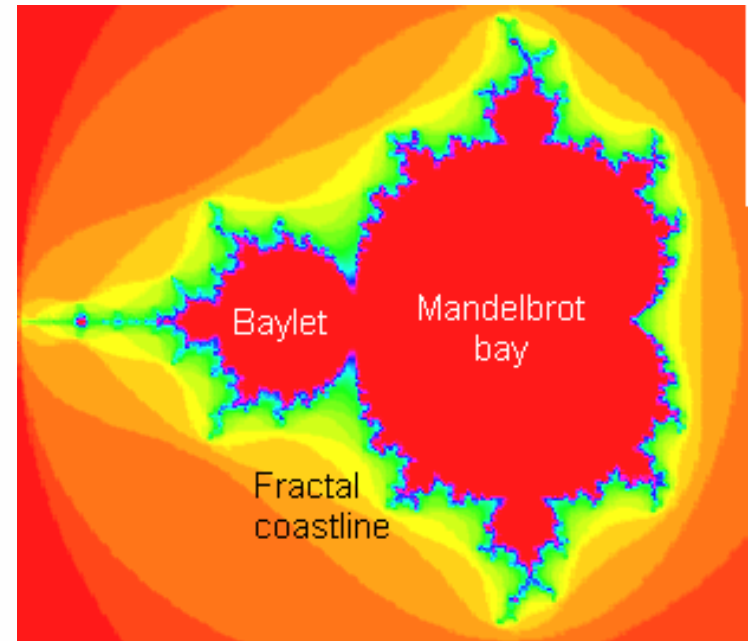
Jetzt wird allerdings geschaut, nach der wievielten Iteration der Abstand eines Punktes zum Ursprung größer als 2 wird.

Nach n Iterationen	Farbe
1	graublau
2	hellgrau
3	rot
4	weiß
5	cyan
6	magenta
7	orange
8	grün
9	gelb
wenn nach 150 Iterationen der Abstand immer noch < 2 ist	schwarz

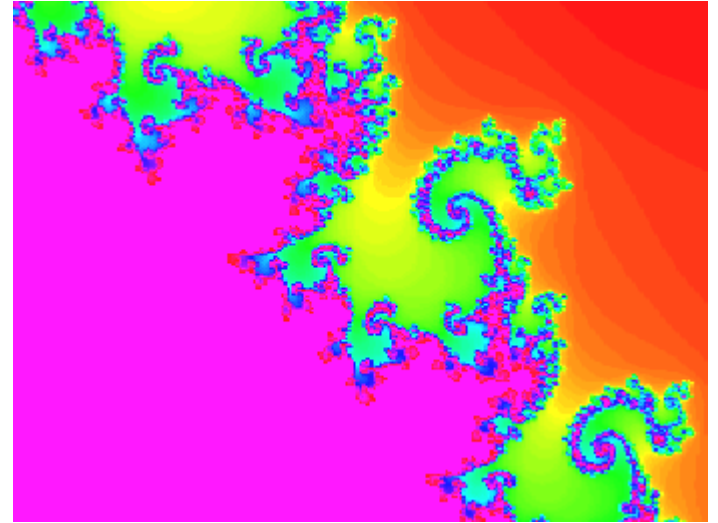
Dies ist nur ein
Beispiel für eine
der vielen Farb-
Möglichkeiten !!

Maplecode für Mandelbrotmenge mit Graphikausgabe

```
> with(plots):  
mandelbrotSet := proc(x,y)  
    local z, m;  
    z:=evalf(x + y*I);  
    m:=0;  
    to 10 while abs(z) < 2 do  
        z:=z^2+(x+y*I);  
        m:=m+1;  
    od;  
    m;  
end;  
plot3d(mandelbrotSet, -2..1, -3/2..3/2, grid=[81,81],  
scaling=constrained, style= wireframe, orientation = [-115,3]);
```



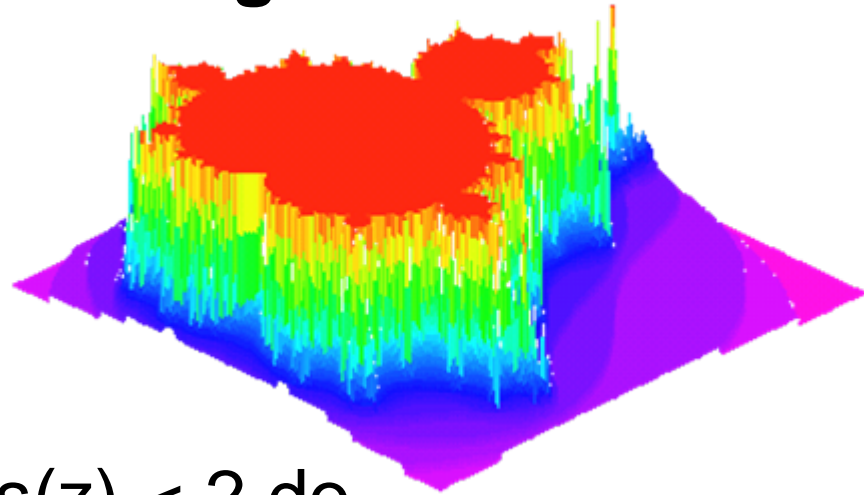
Beispiel für eine Ausschnittsvergrößerung



```
> plot3d(0, --0.83561 .. -0.78523, 0.15559 ..  
0.19343, orientation=[-90,0], > grid=[250, 250],  
style=patchnogrid, scaling=constrained, >  
color=mandelbrot
```

3 dimensionale Mandelbrot-Menge

```
> restart;  
> mandelbrot := proc(x, y)  
> local z, m;  
> z := evalf(x+y*I);  
> for m from 0 to 30 while abs(z) < 2 do  
> z := z^2+(x+y*I)  
> od;  
> m  
> end:  
> plot3d(mandelbrot, -2 .. 0.7, -1.2 .. 1.2, grid=[150,  
150]);
```



Kommerzielle Anwendungen von Fraktalen

Beispiel: Bildverarbeitung

Genuine Fractals 5

The Industry Standard for Image Enlargement

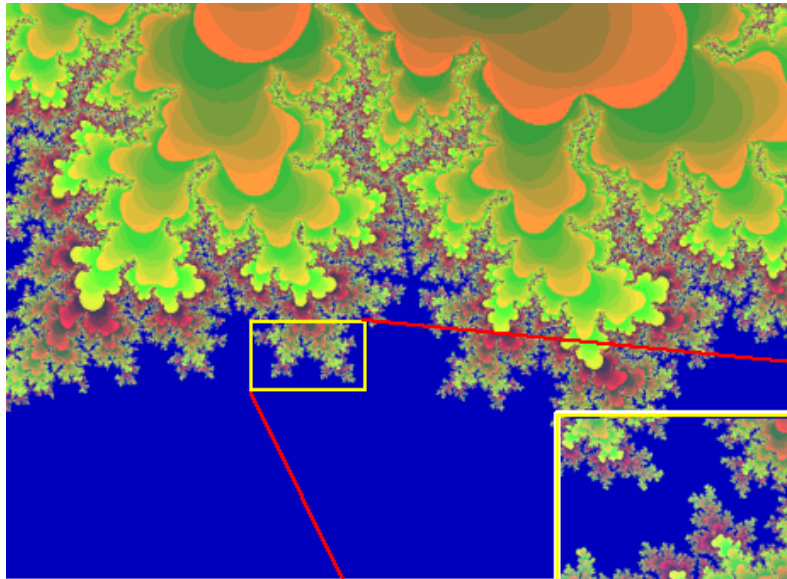


<http://www.ononesoftware.com>

Wichtige Eigenschaften der Fraktale

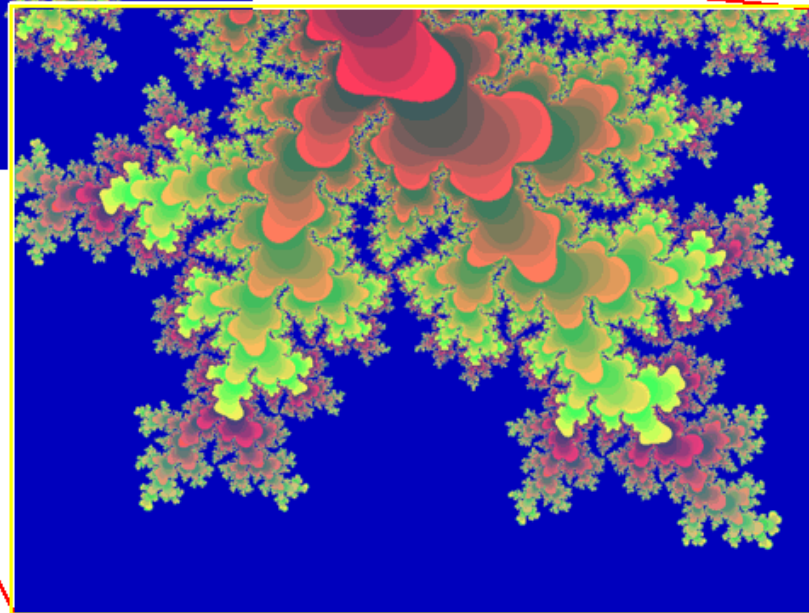
Selbstähnlichkeit

Man kann an das Fraktal heranzoomen und erkennt Formen oder Strukturen, die schon einmal auftraten.



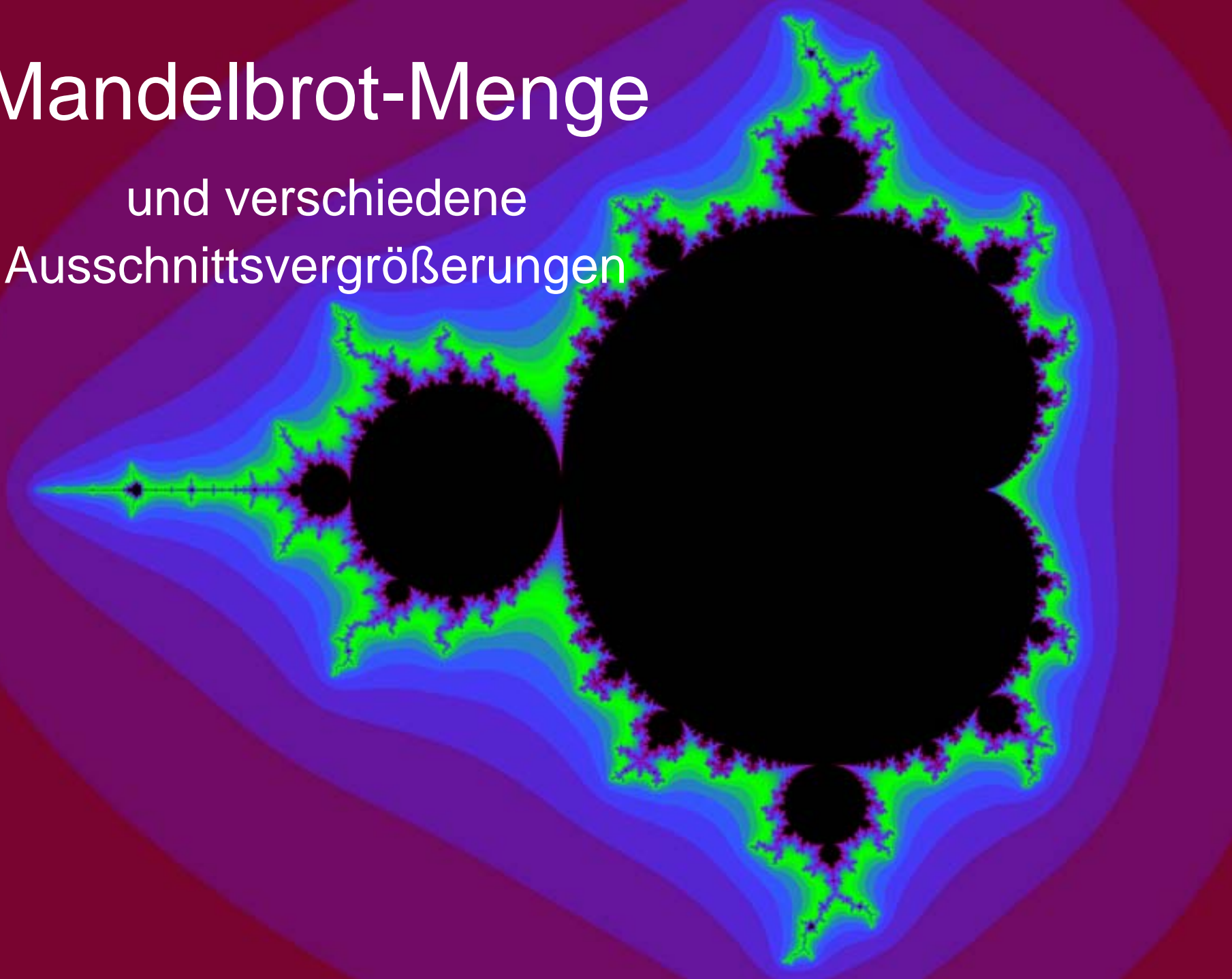
Fraktale Dimension

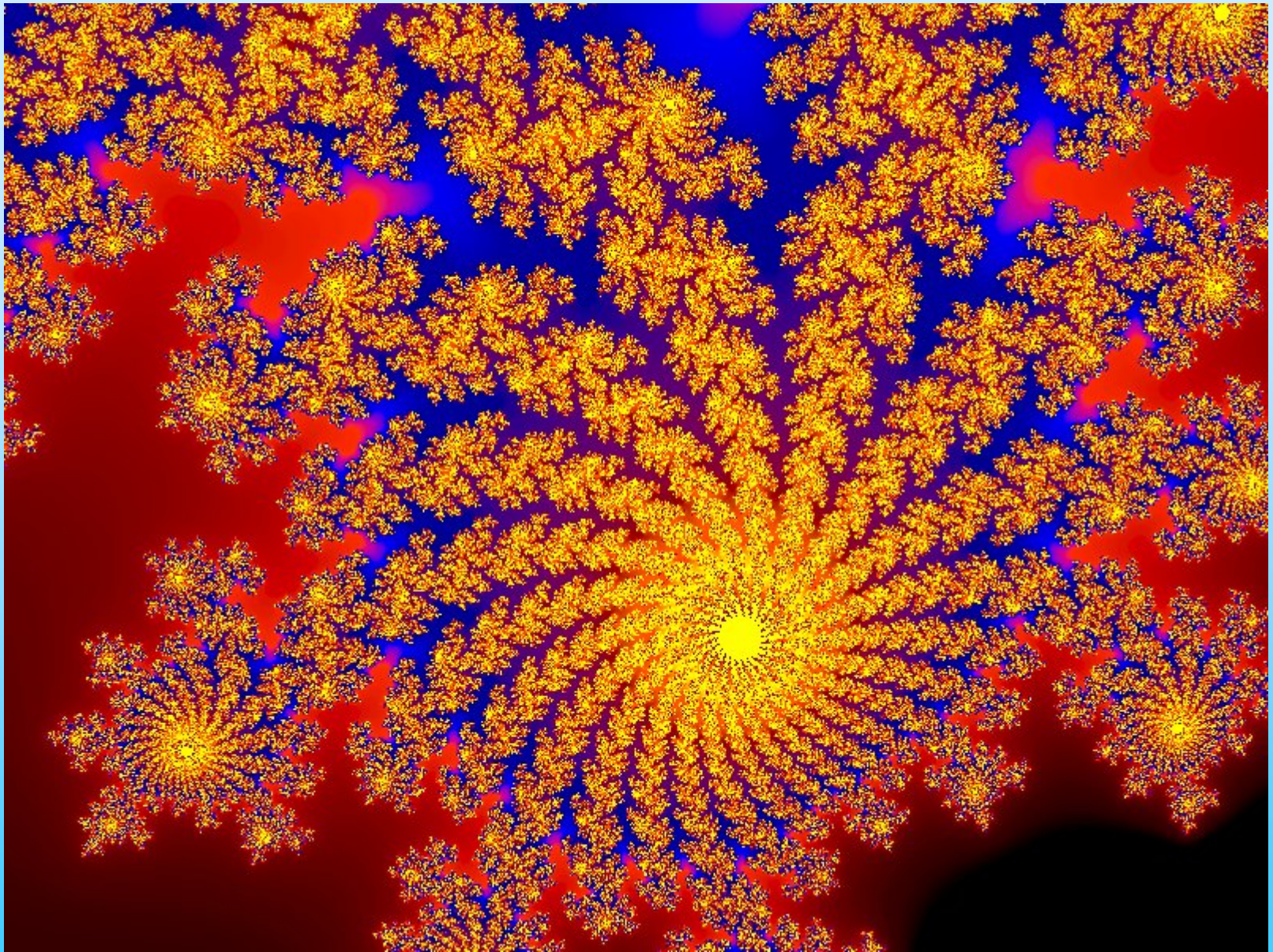
Ein Fraktal ist ein Objekt, dessen fraktale Dimension zwischen 1 und 2 bzw. 2 und 3 liegt.

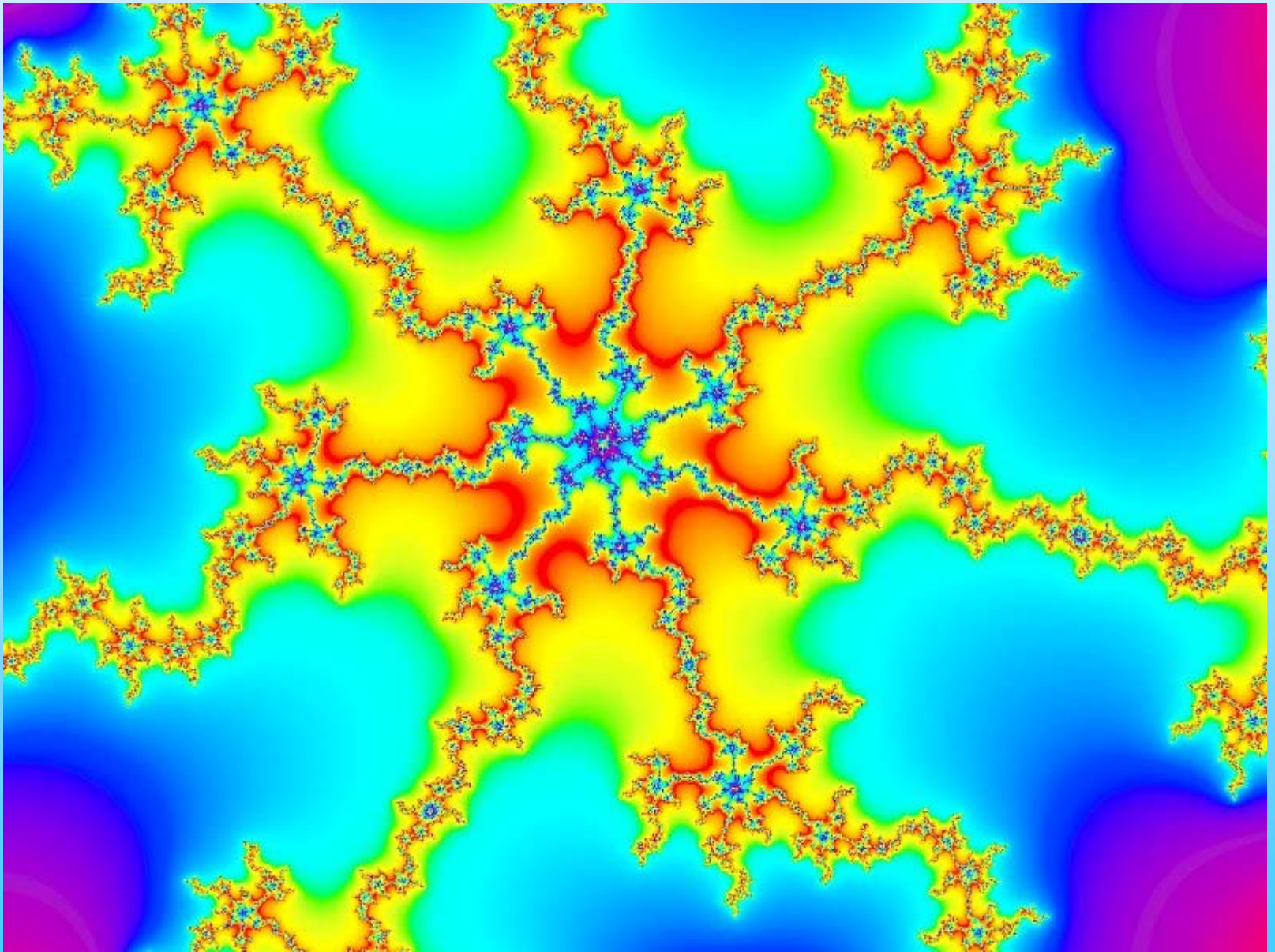


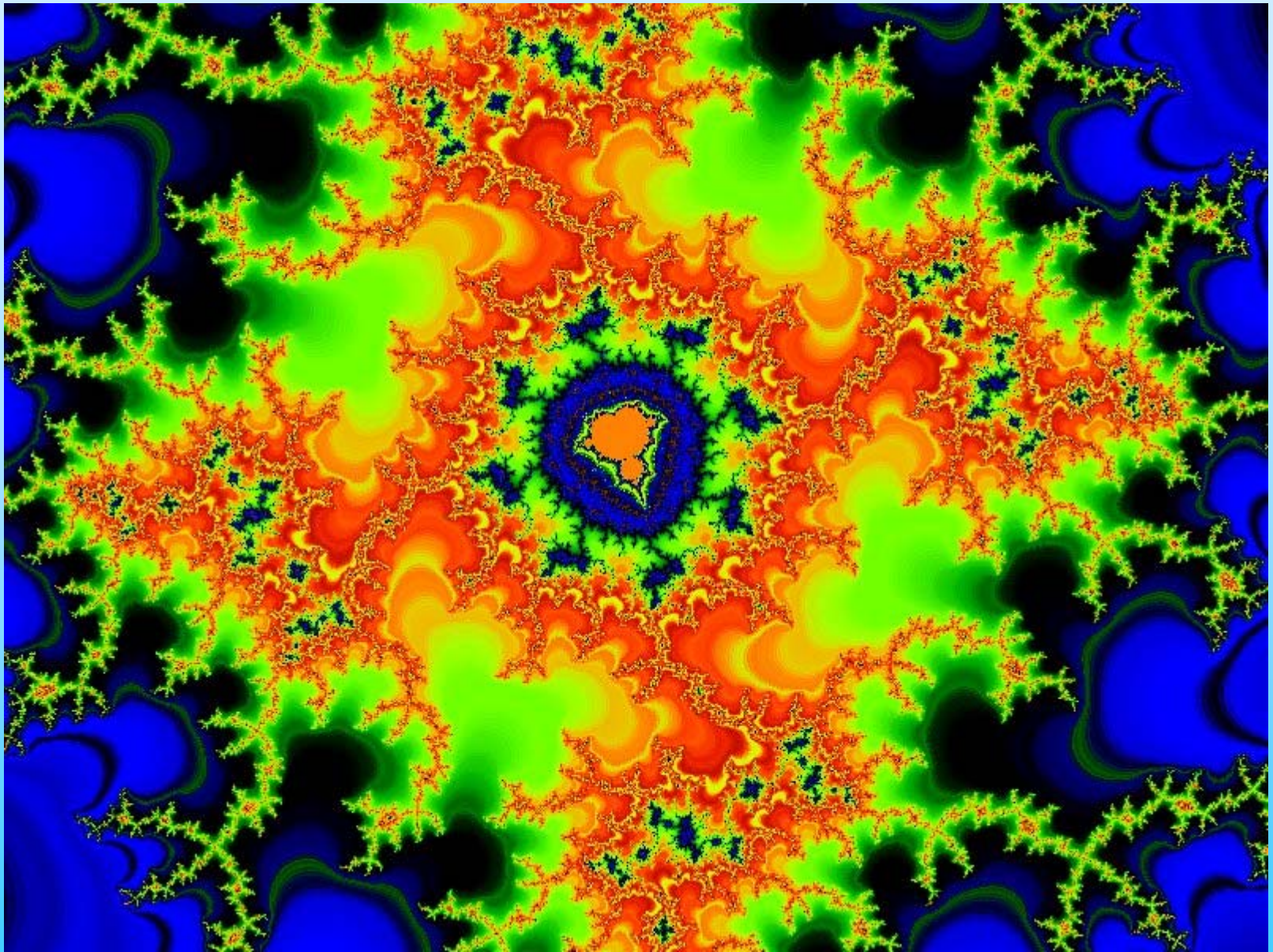
Mandelbrot-Menge

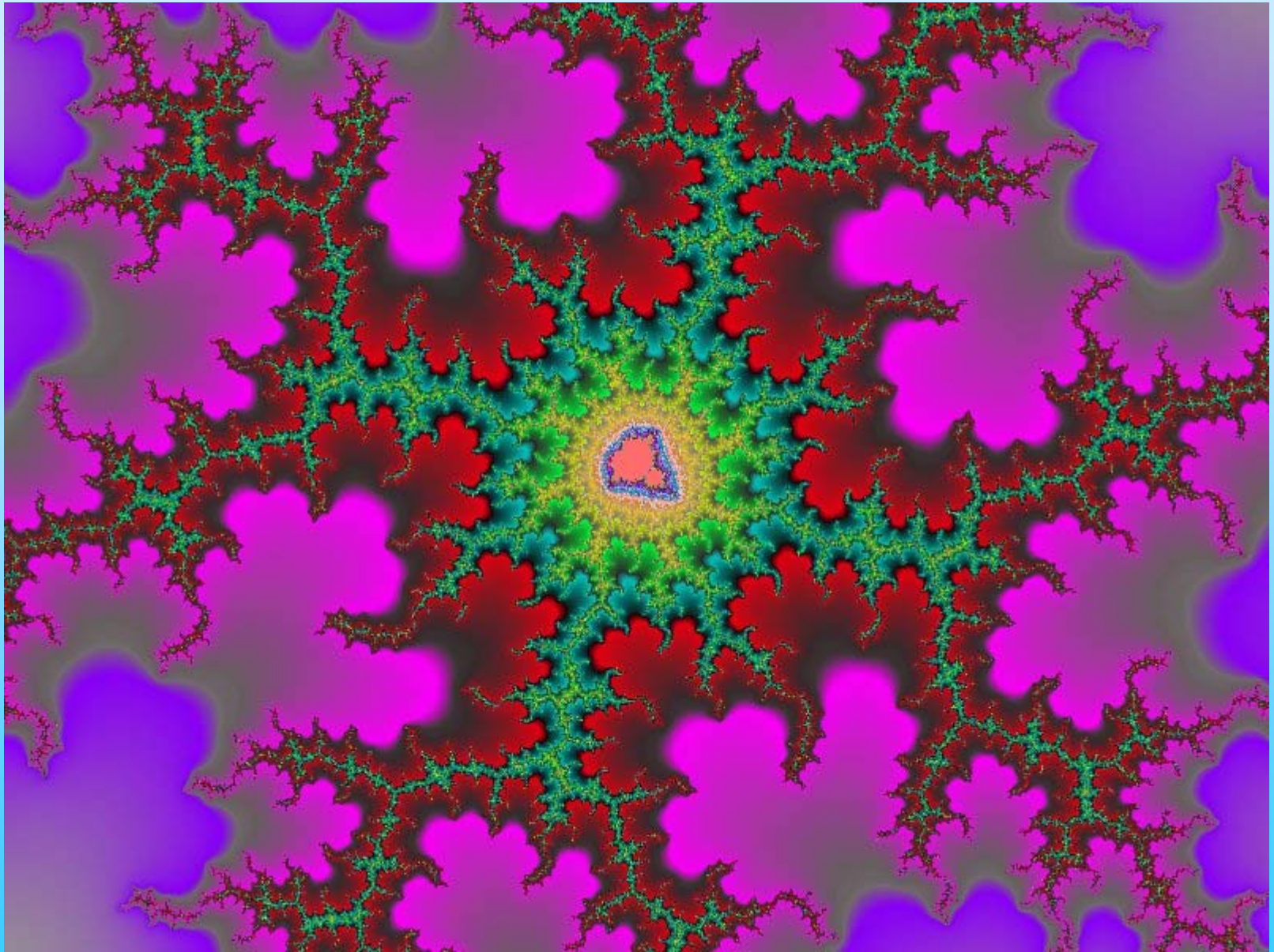
und verschiedene
Ausschnittsvergrößerungen

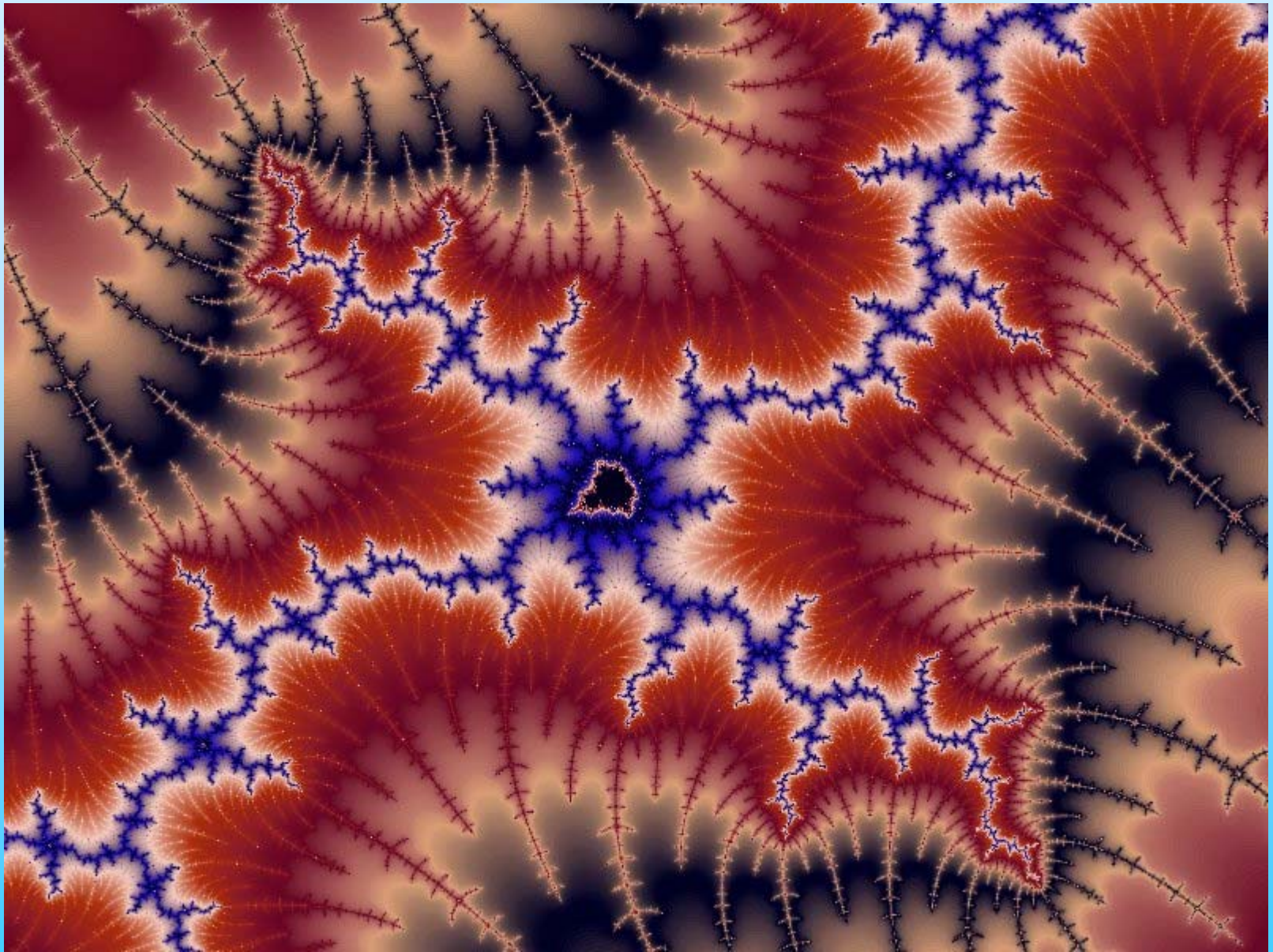


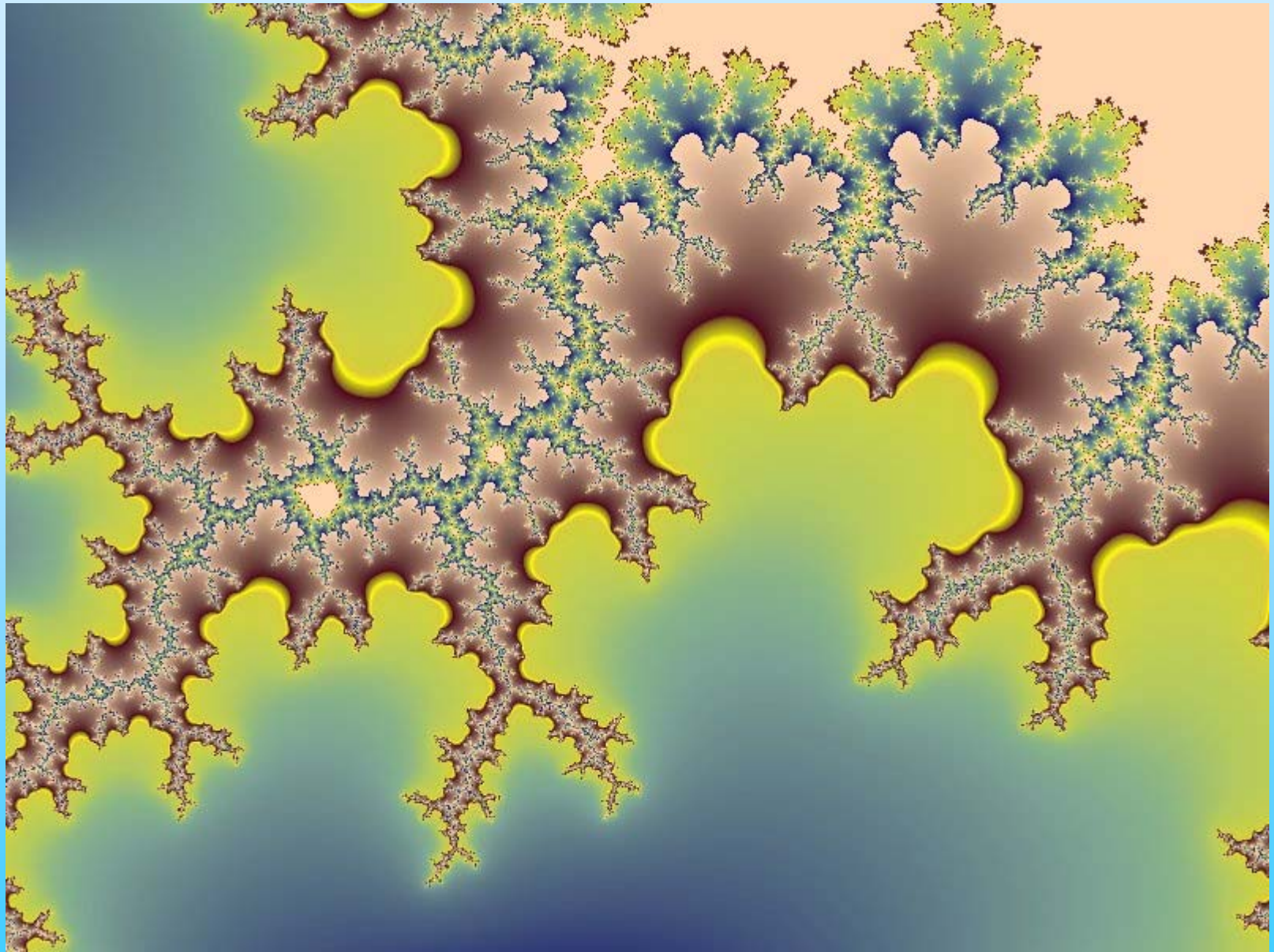




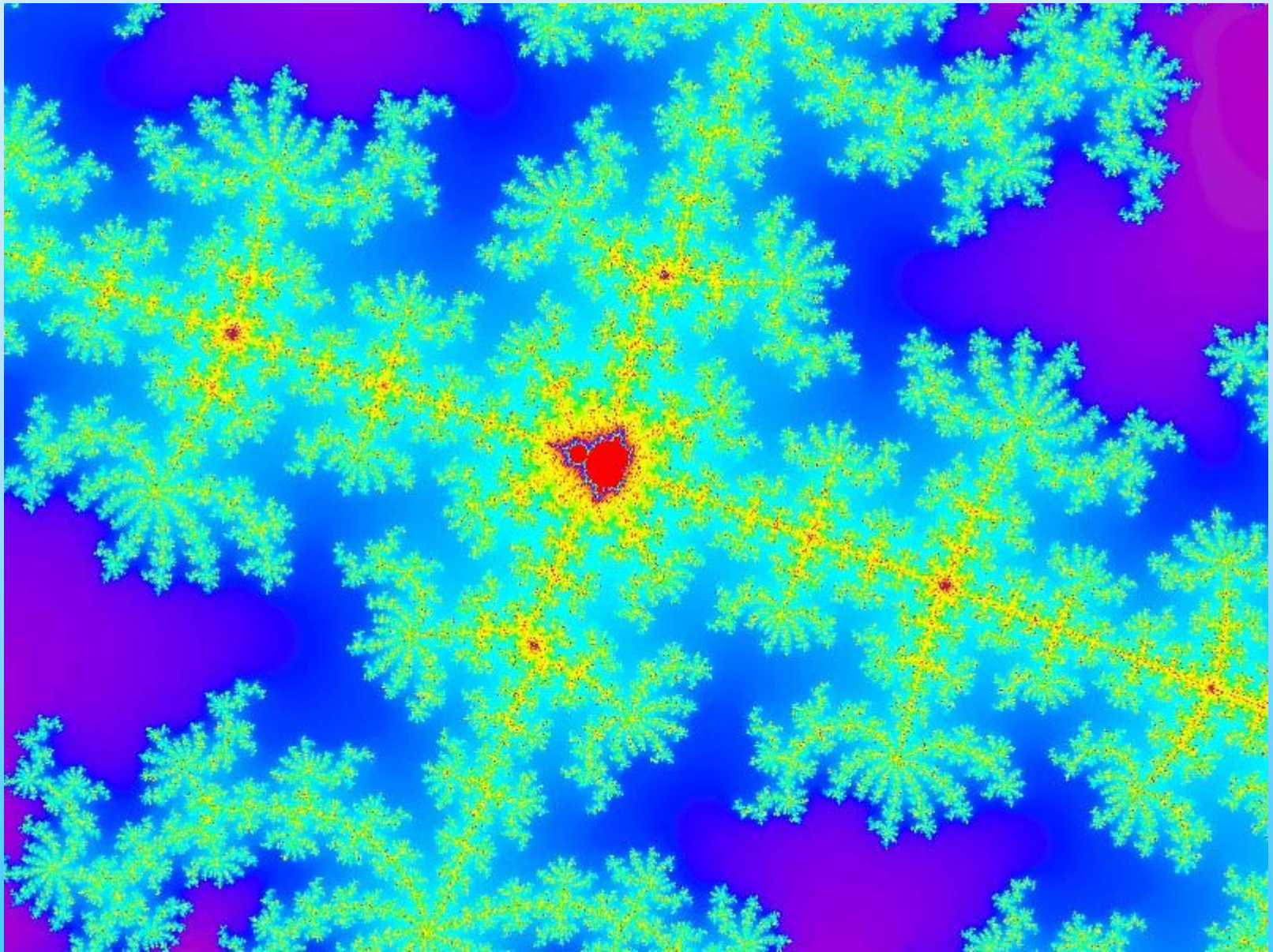


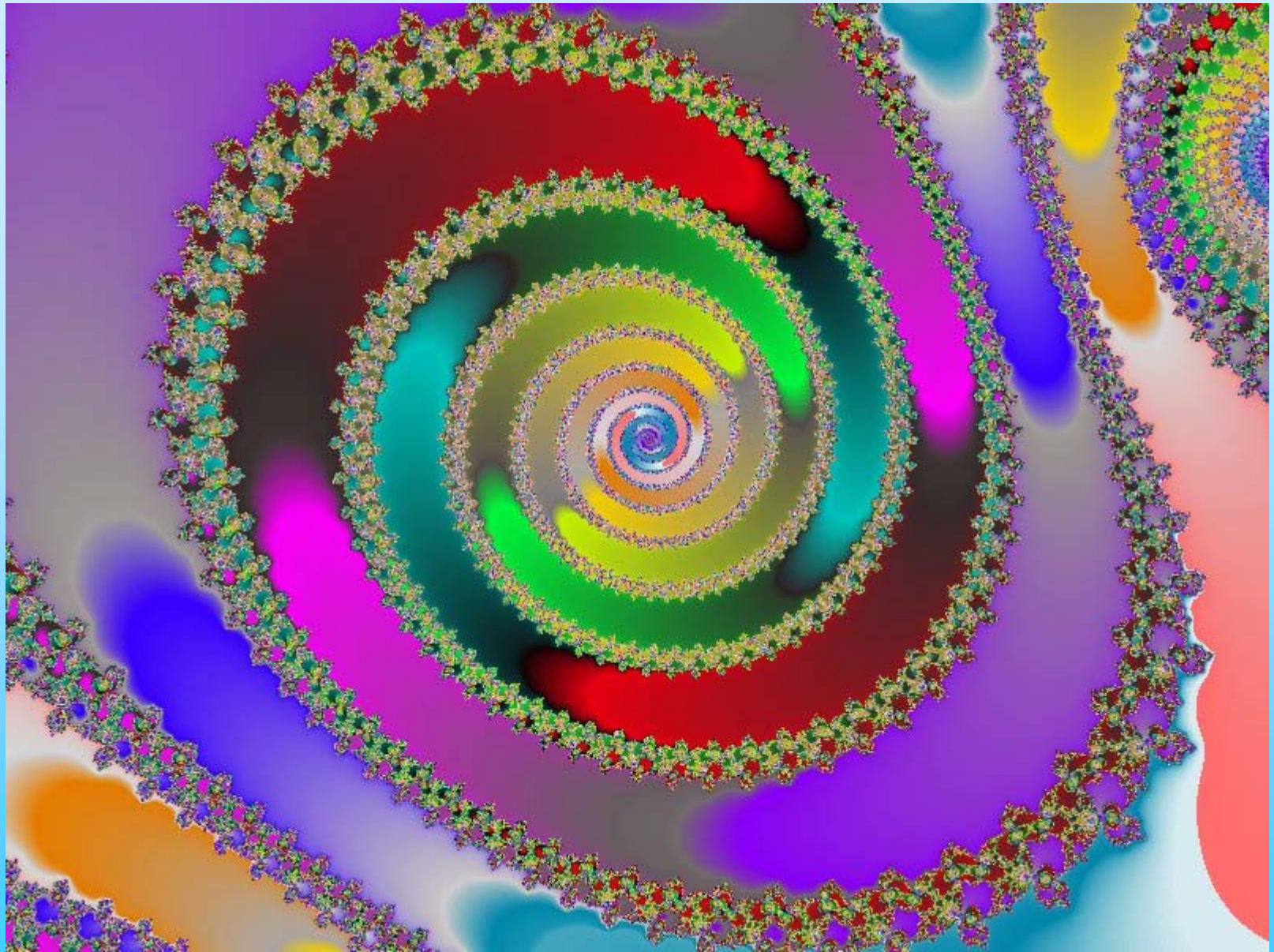




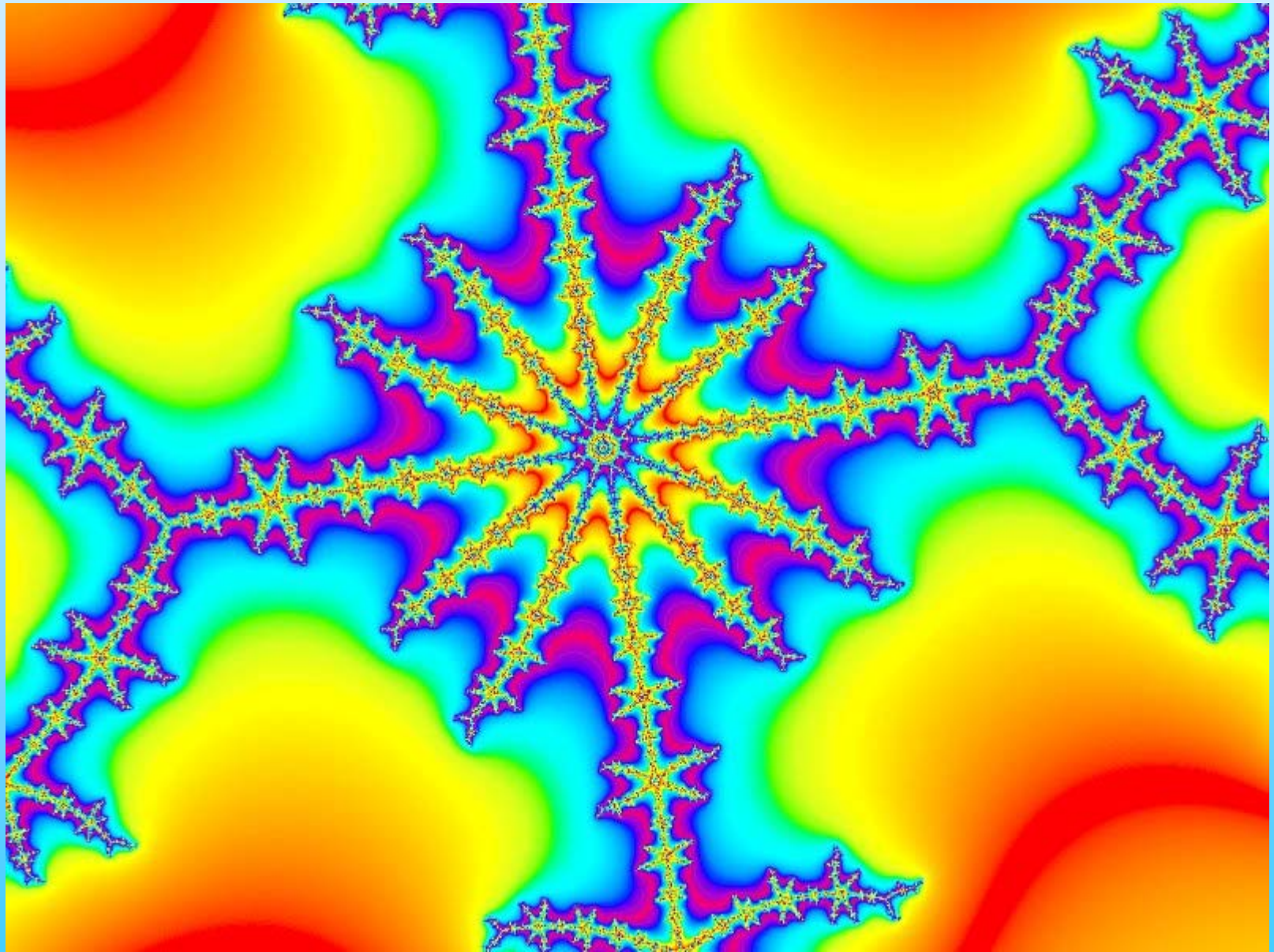






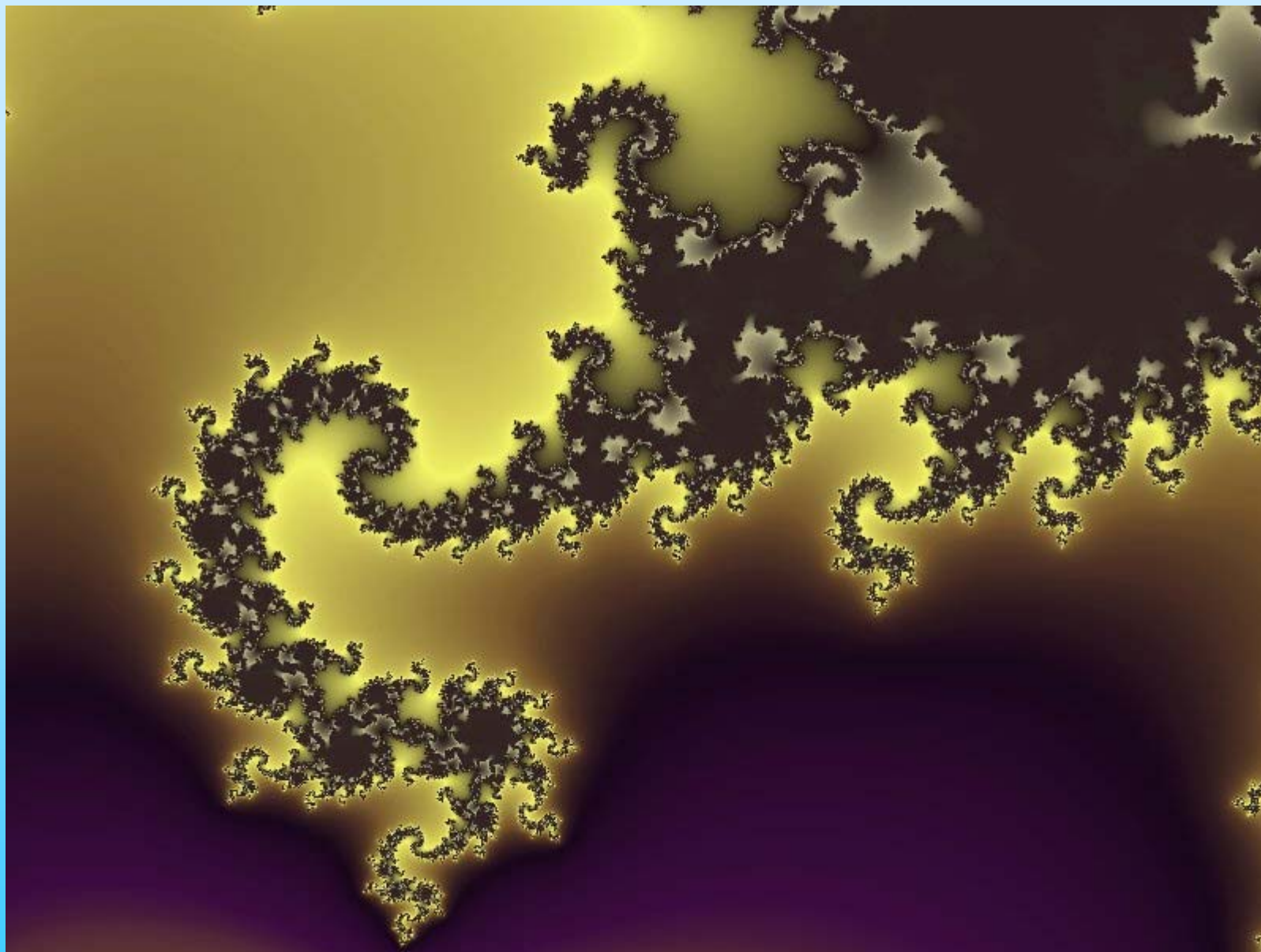


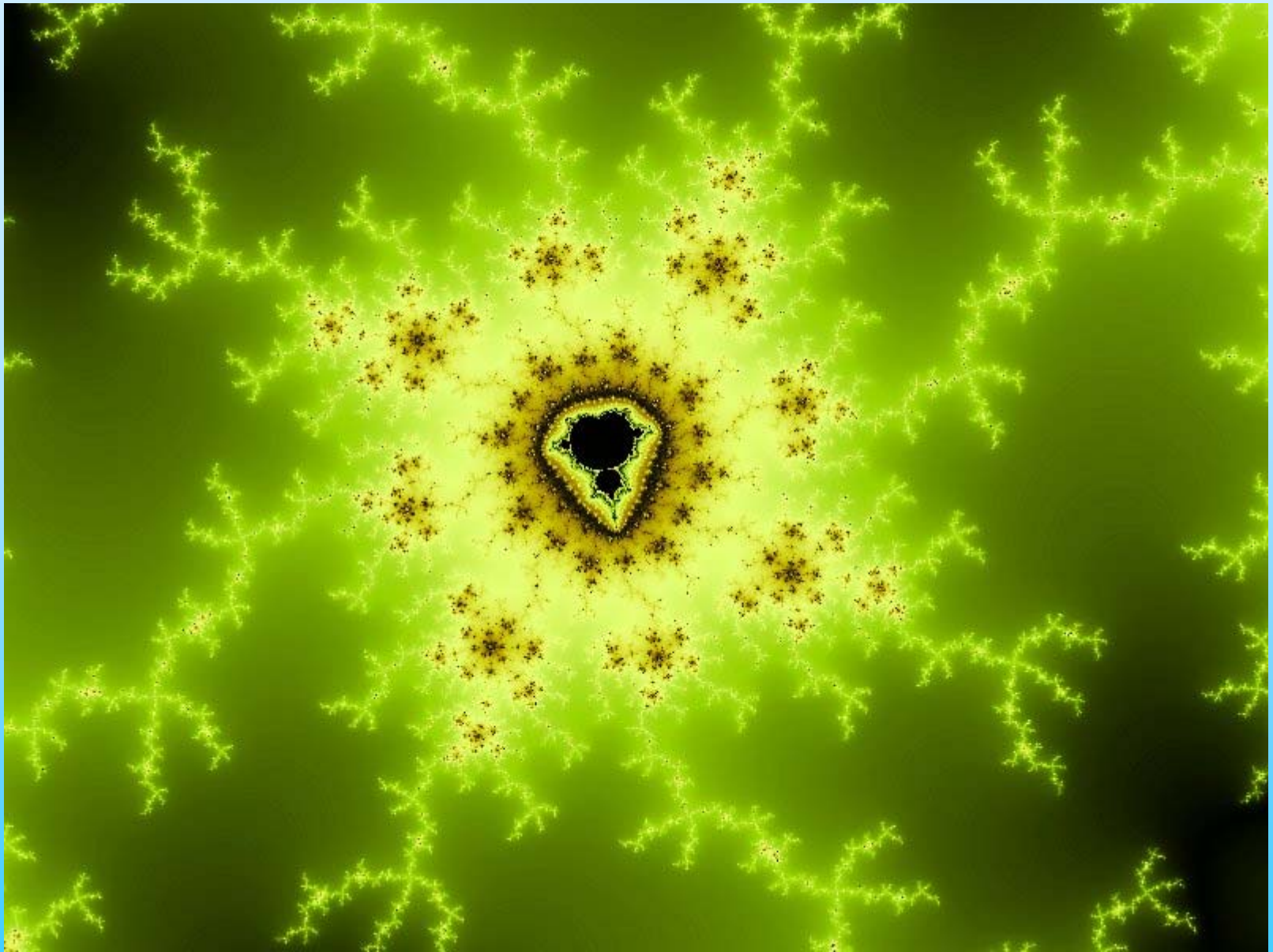
Universität Bremen

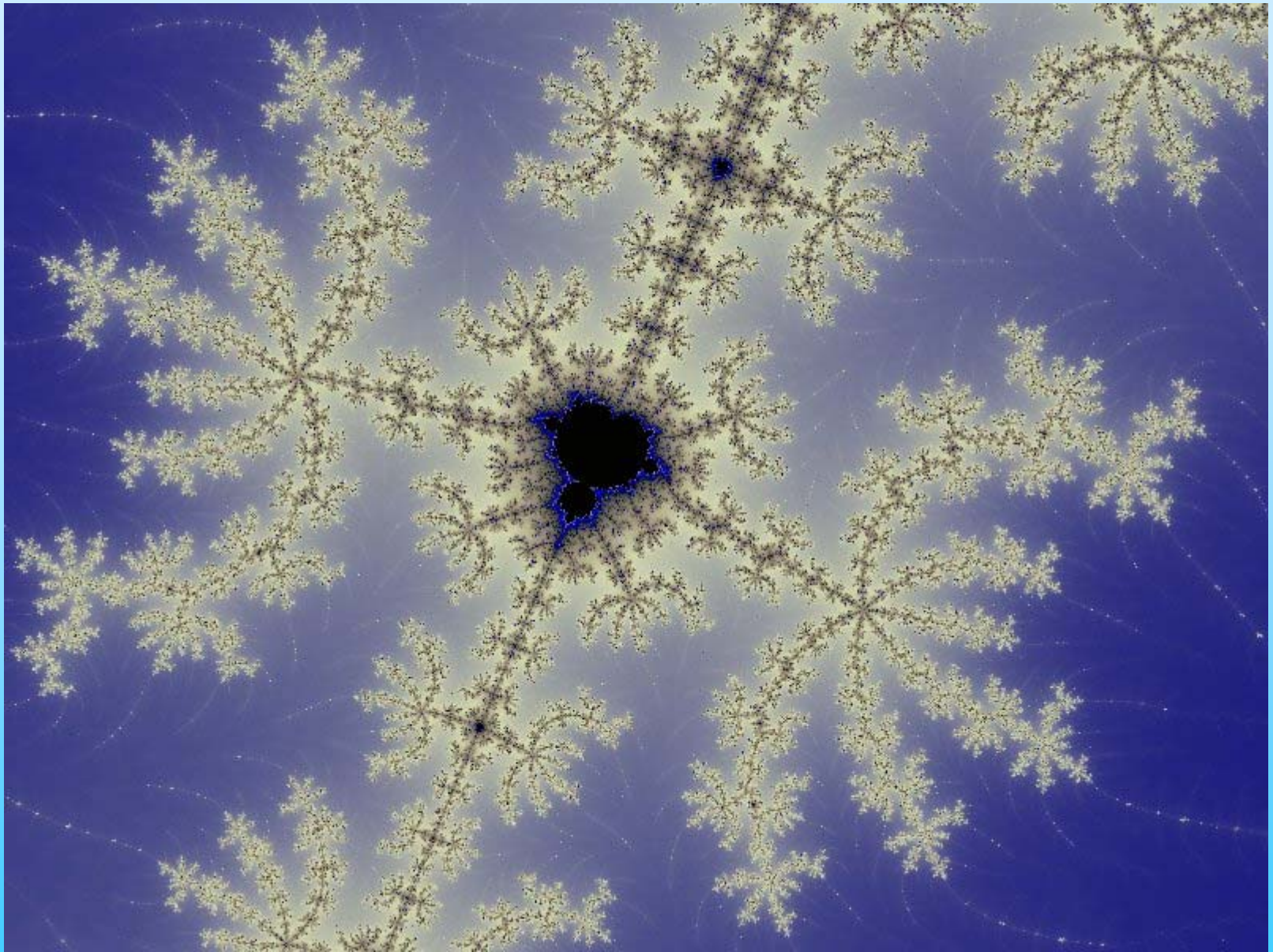


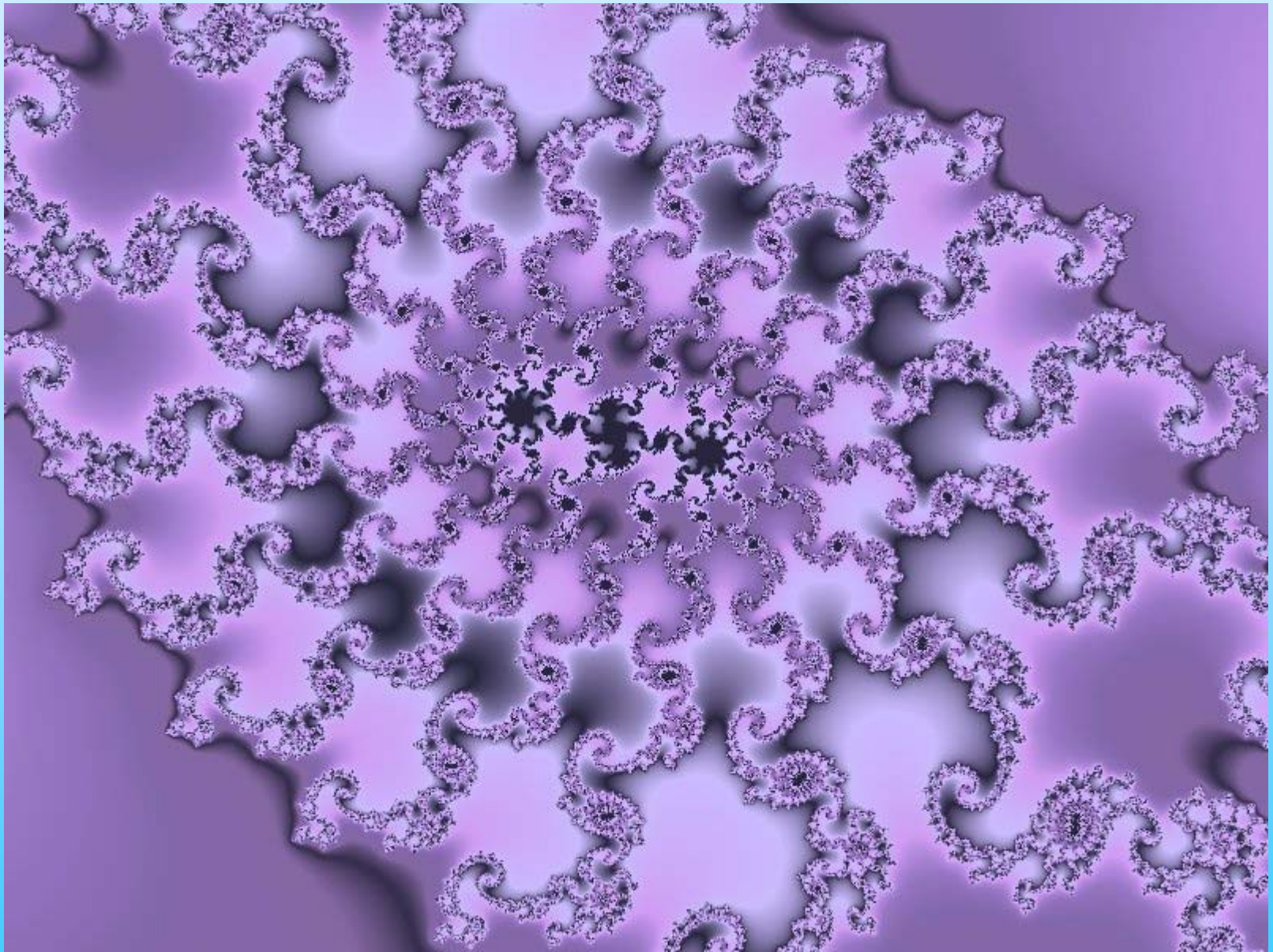


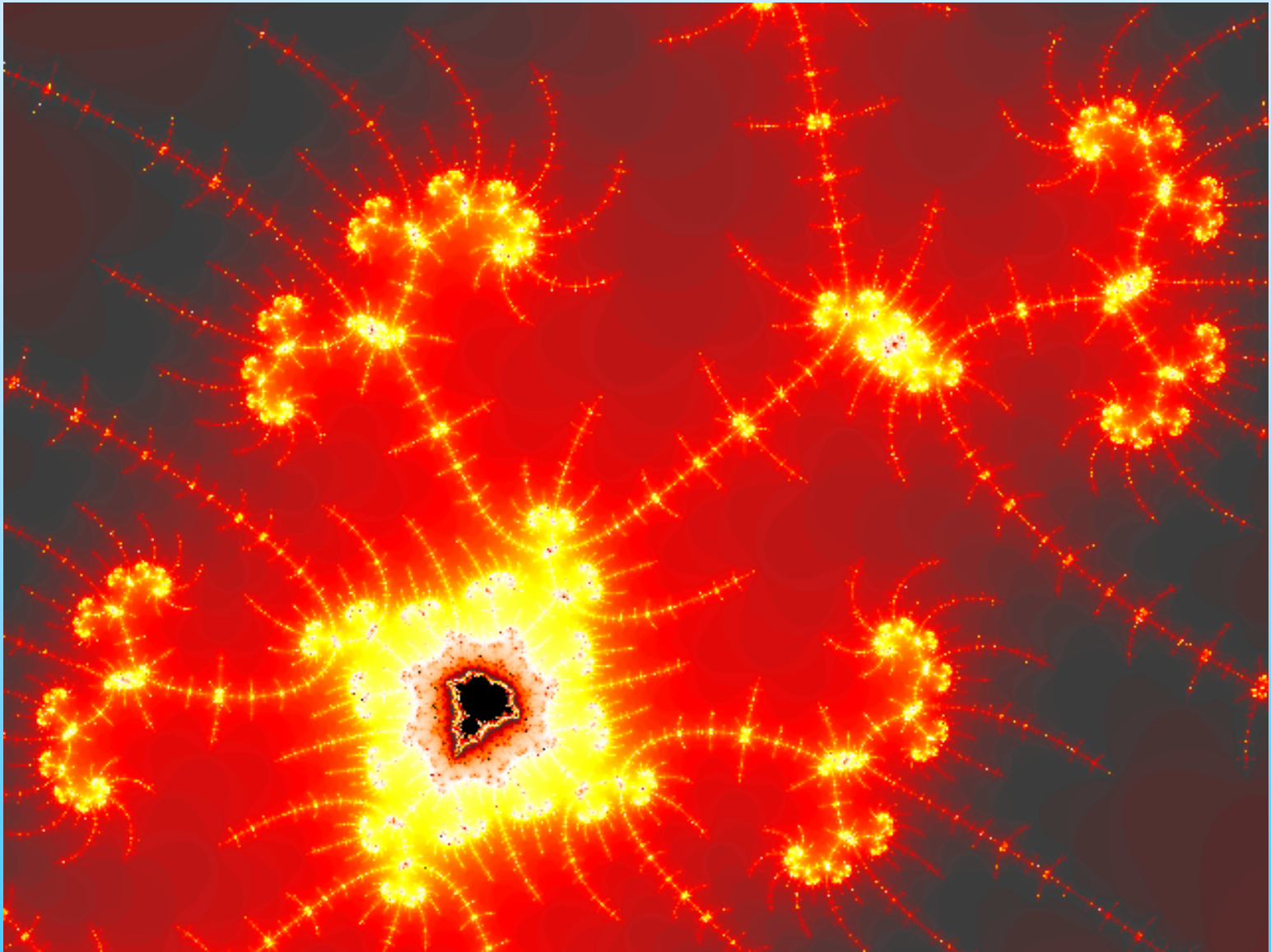


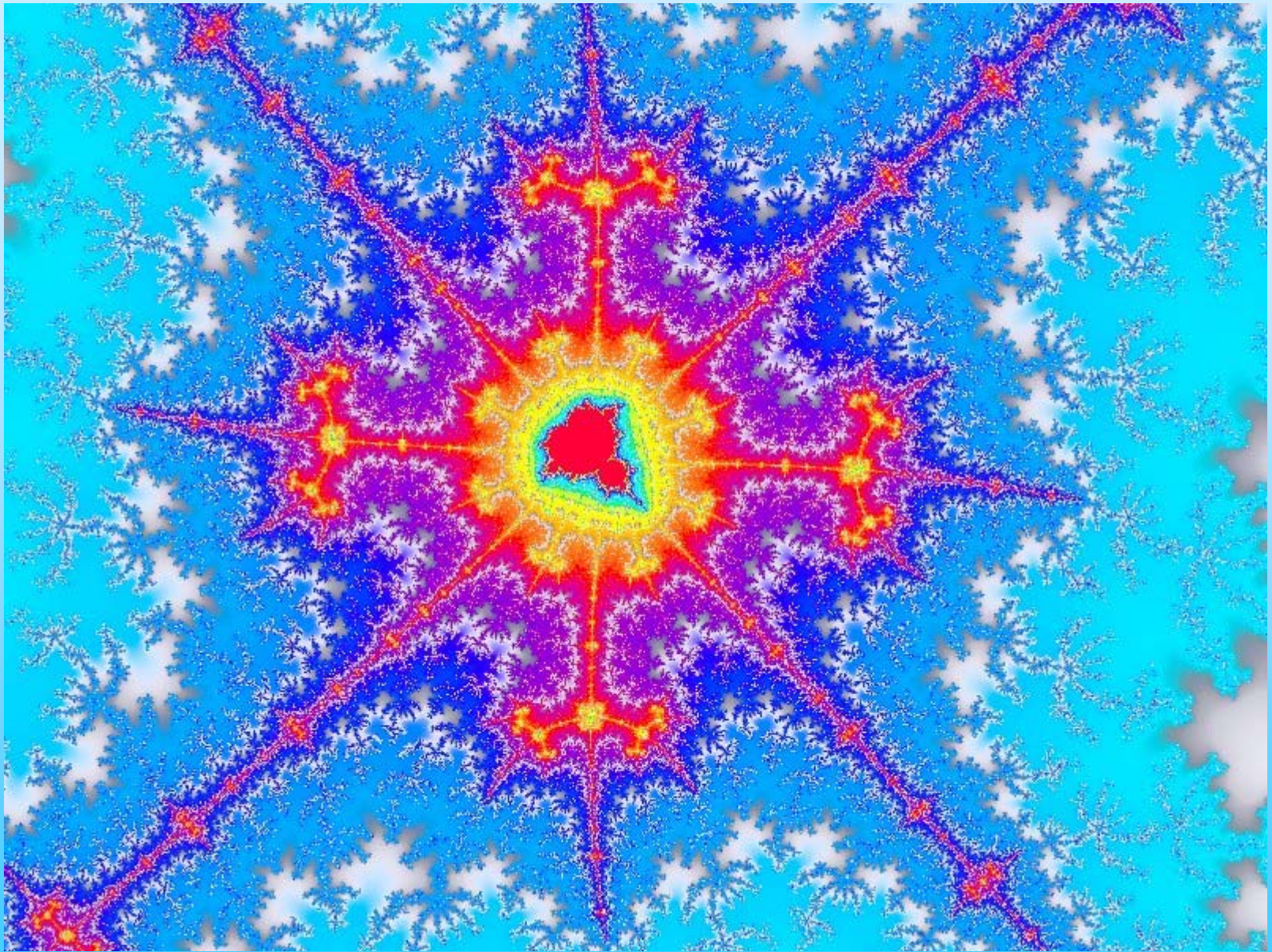


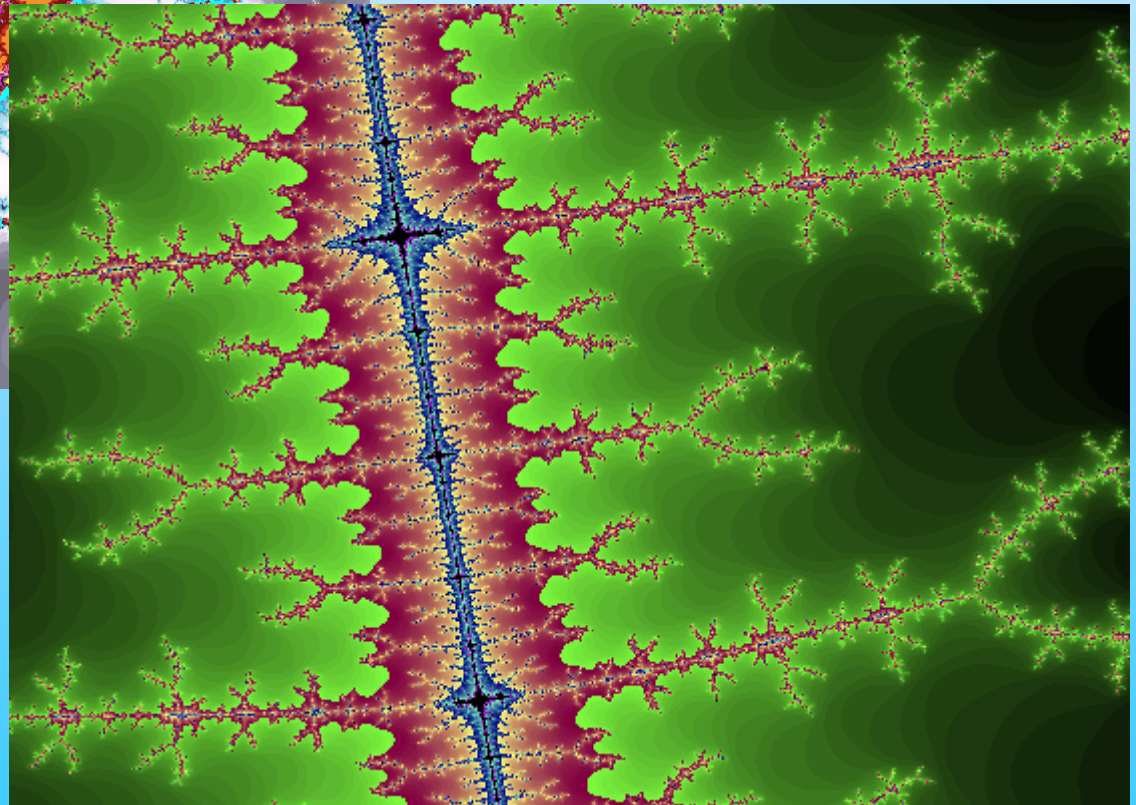
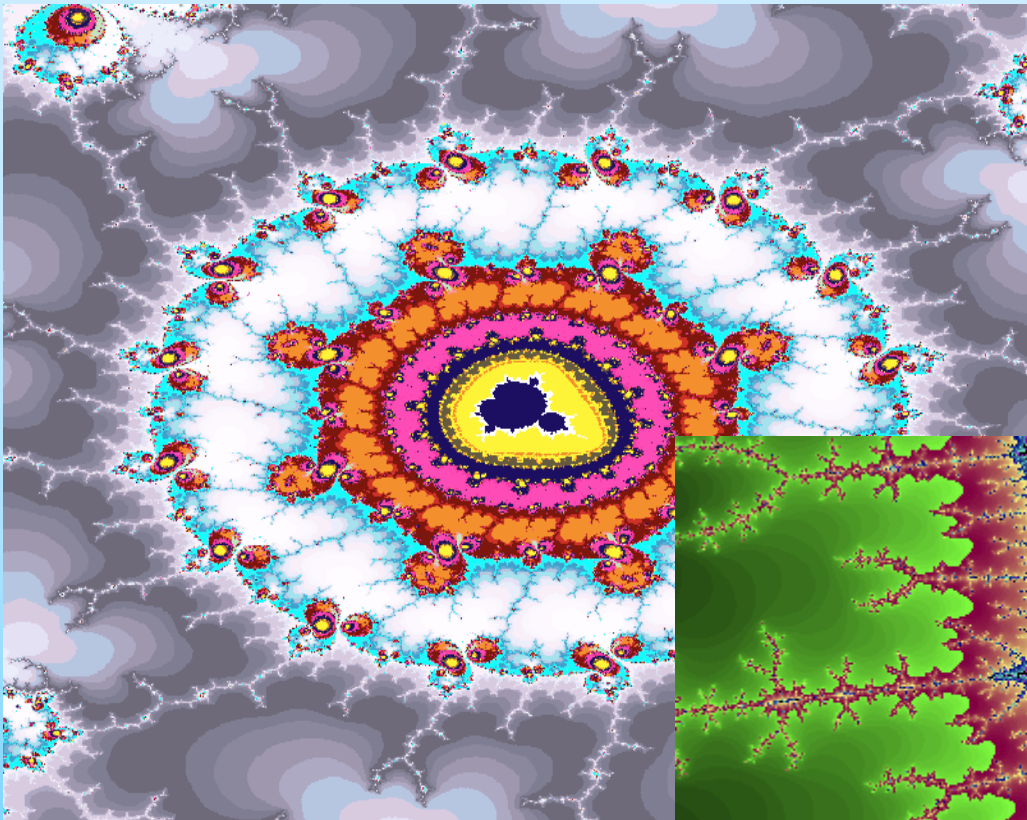






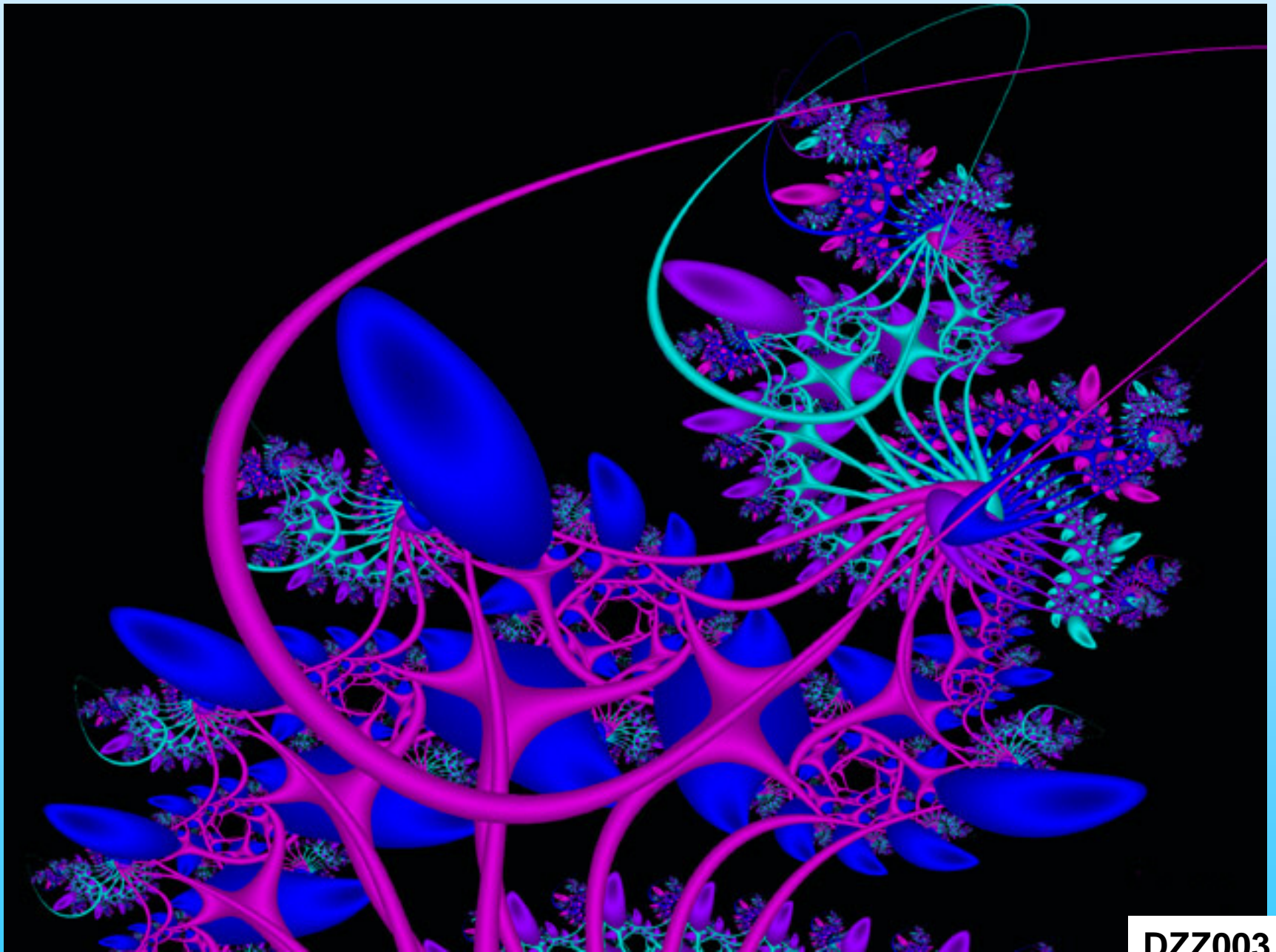








<http://www.fractalartcontests.com/2007/>
<http://www.mandelbrot.org/>



DZZ003
** Jeff Field*

I'm Growing



Call to Life Alien Buddha *



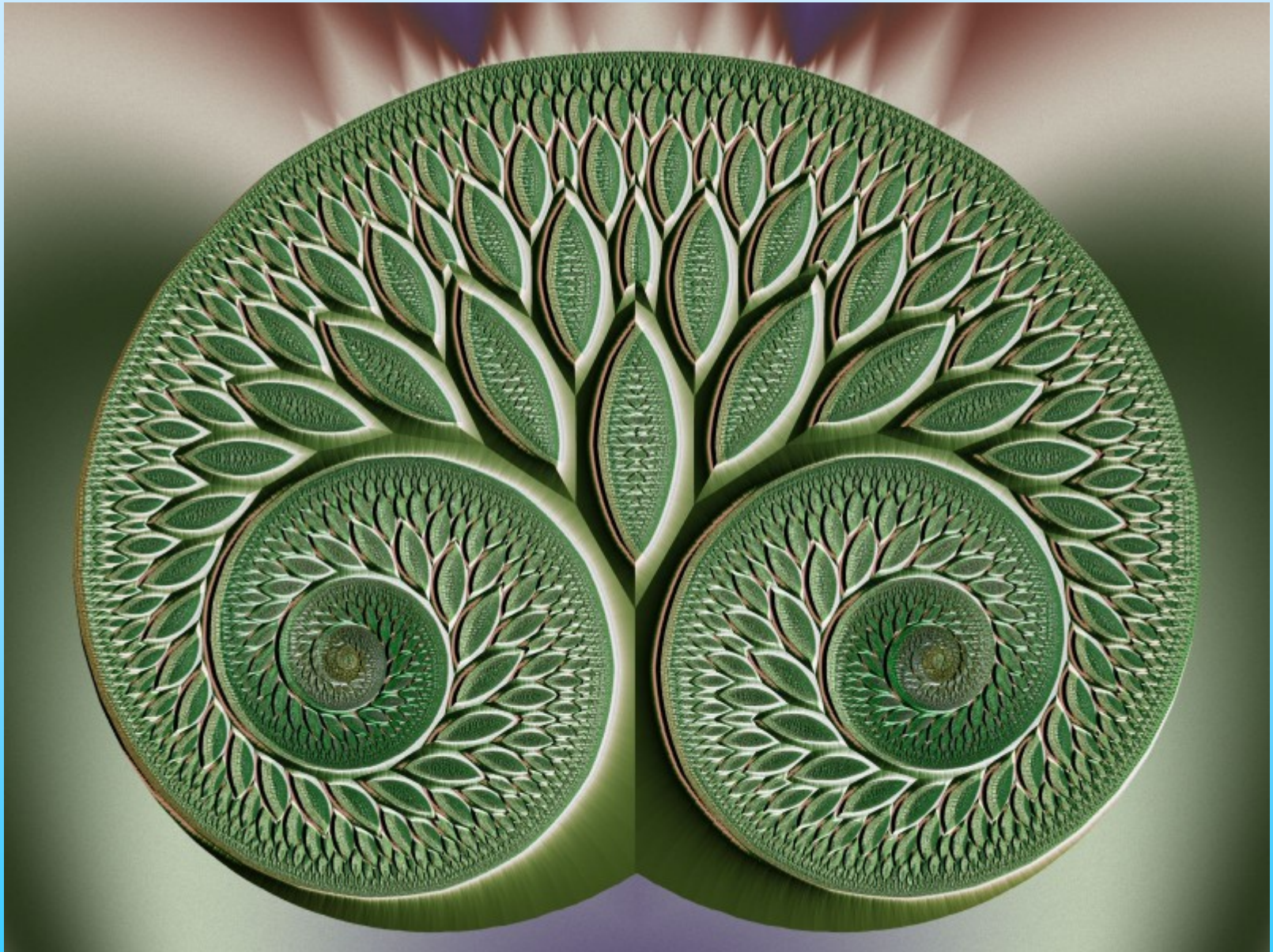
Omen of the Phoenix*



Visions of the Mind



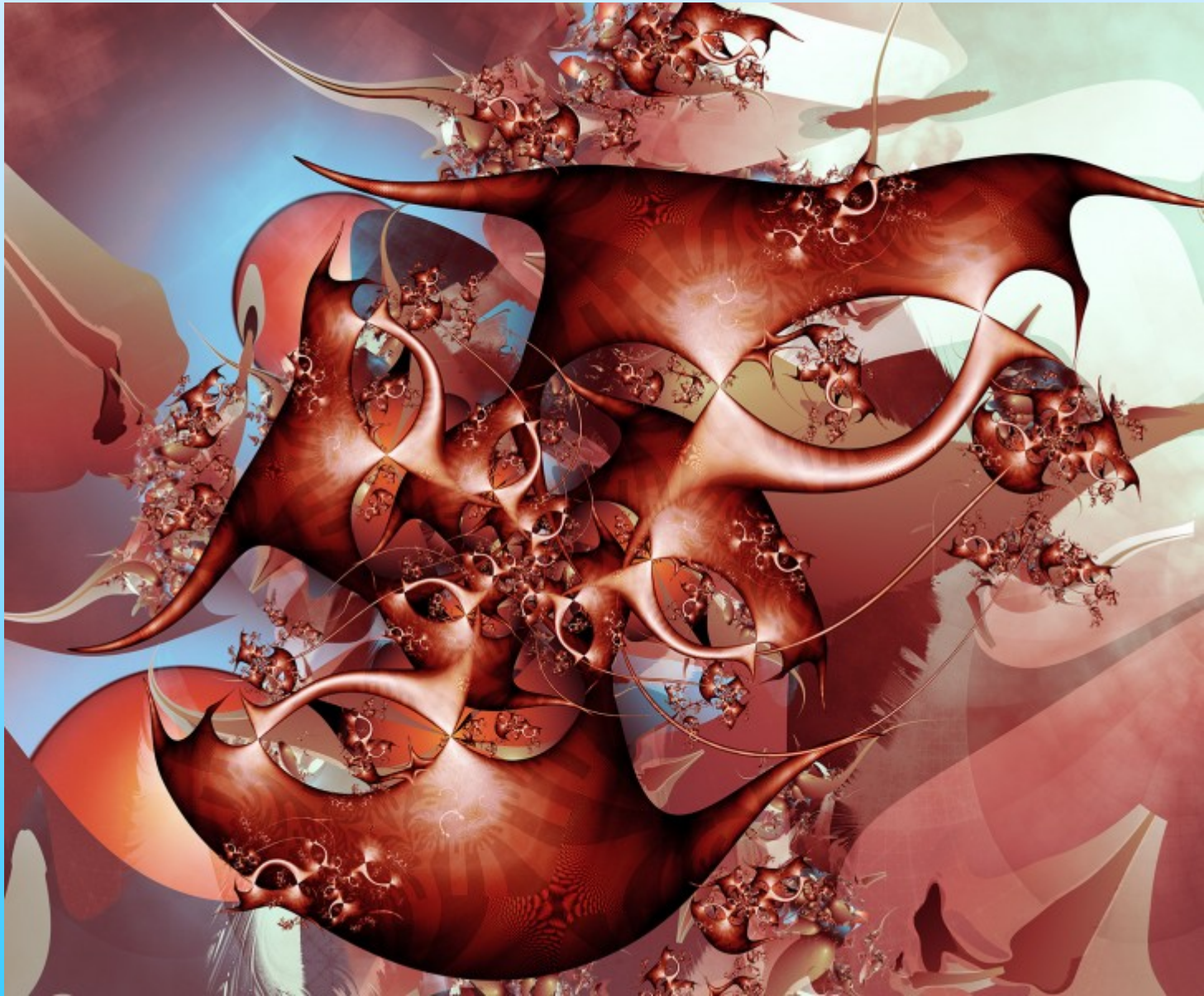
Tree Of Life*



BaranG



Nameless



The Sun*

