

Berechnung von Grenzwerten

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}$$

Es gibt 6 elementare Methoden
Grenzwerte zu bestimmen.

a) Grenzwert - Arithmetik

Satz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = a b$$

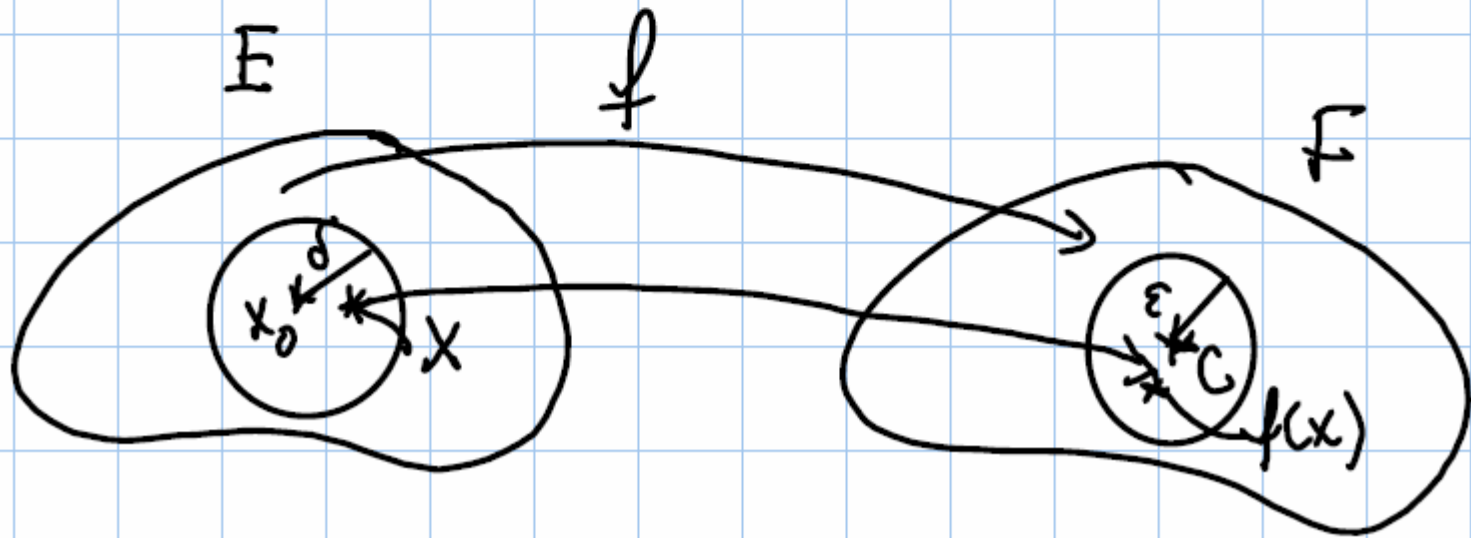
$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad \text{falls } b \neq 0$$

Diese Regeln gelten auch für $x_0 = \pm \infty$

⑥ Def. Seien E, F normierte VR u.
 $f: E \supset D \rightarrow F$ eine Abbildung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D$$

$$(\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - c\| < \varepsilon)$$



$$1) x_0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2^3 + 3 \cdot 2 + 5}{2^2 - 2 \cdot 2 + 1} = 19$$

$$2) \text{ Annahme: Seien } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}, \text{ und}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-5)^2 = 25 \text{ bereits bewiesen}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) \sin x}{x^2 (x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-5)^2}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{50}$$

1) Funktionstherme umformen
(kürzen oder erweitern)

Beispiel 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) \cdot (\sqrt{x+1} + 1)}{x (\sqrt{x+1} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1 - 1}{x (\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

Bem. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \\ &= \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n\text{-mal}} = n \end{aligned}$$

c) "Funktionstherme eingrenzen"
(Vergleichskriterium)

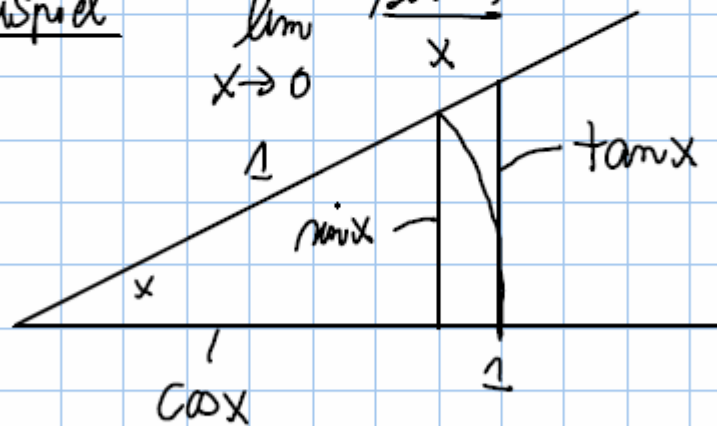
Satz: Wenn $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
für alle $x \in \mathcal{U}_r(x_0)$

$$\text{u. } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = C$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$



Kleines Dreieck: $\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$

Große Dreieck: $\frac{1}{2} \tan x$

Kreissektor: $\frac{1}{2} x$

$$\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^d$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix}$$

$$f_i : \mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^d \xrightarrow{p_i} \mathbb{R}$$

$$p_i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = y_i$$

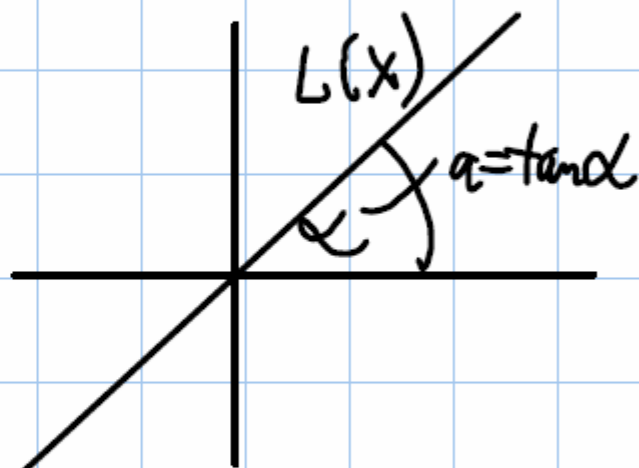
Vorbemerkungen

1) $V = \mathbb{R}$

Lemma $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear \Leftrightarrow

$$\exists \forall L(x) = ax$$

$a \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$



Beweis $L(x) = L(x \cdot 1) =$
 $= x \cdot \underset{a}{L(1)} = ax$

□

2) Affine Unterräume u. affine Abbildungen

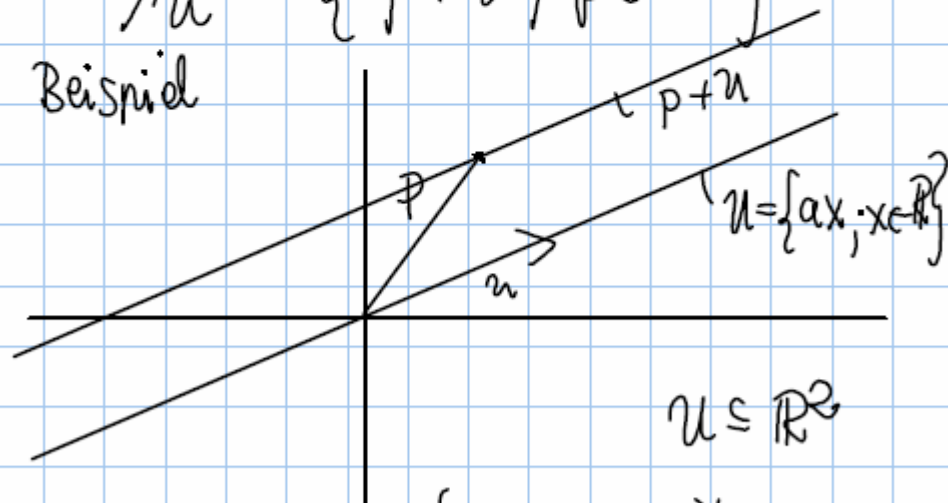
2.1 Def. Seien geg. Vektorraum V , $U \subseteq V$ Unter.
und $p \in V$

Dann heißt $M := p + U :=$

$\{p + u; u \in U\}$ ein
affiner Unterraum von V .

$$V/U = \{p + U; p \in V\}$$

Beispiel



$$p + U = \{p + u; u \in U\}$$

$\mathbb{R}^2/U \equiv$ Menge aller par. Geraden
in \mathbb{R}^2 .

2.2 Affine Abbildung

Def. Sei $L: V \longrightarrow V$ lineare Abb.
u. $p \in V$

Dann heißt $a(x) := p + L(x)$
heißt affine Abbildung.

p heißt Translationsvektor

Affine Abbildung \equiv lineare Abbildung +
Verschiebung.

Def. $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \longmapsto f(x)$

$a \in D$ sei ein innerer Pkt, d. h.
 Es ex $\delta > 0$ mit $K(a, \delta) \subseteq D$.

f ist in a total differenzierbar \Leftrightarrow
 (\equiv linear approximierbar) Def.

Es existieren

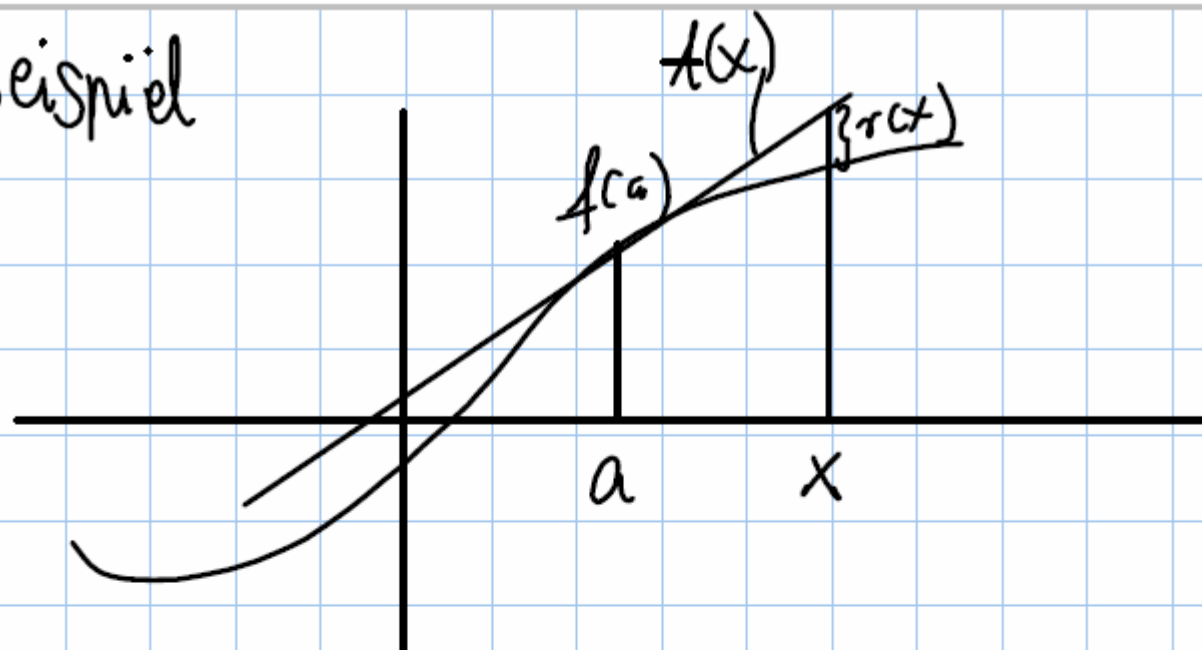
- 1) lineare Abb. $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und
- 2) Abbildung $r: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x)$$

$$\text{u.} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$$

Schreibweise $Df(a) = L$ heißt
 totales Differential von f in a :

Beispiel



$$f(x) = T(x) + r(x)$$

Tangente
$$\begin{aligned} T(x) &= f(a) + \frac{df(a)}{dx} \cdot (x-a) \\ &= f(a) + k(x-a) \\ &= f(a) + L(x-a) \end{aligned}$$

$$L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto kx = \frac{d}{dx} f(a) \cdot x.$$

Spezialfall $n=m=1$, a innerer Pkt.

$$f: \mathbb{R} \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$$

① f differenzierbar in $a \in D \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \frac{d}{dx} f(a)$$

② f diff. in $a \in D \Leftrightarrow$

\exists ex. lineare Abb. $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ u. $r: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x)$$

Satz ① \Leftrightarrow ②

Beweis

" \Leftarrow " $f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x)$

$$L(z) = kz \quad k \text{ konstant.}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + k(x-a) + r(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k + \frac{r(x)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k + \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a} = k$$

$\underbrace{\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a}}_{\text{n. Vorr.} = 0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f(a) + r(x) \\ &= f(a) + \frac{d}{dx} f(a)(x-a) + r(x) \\ &= f(a) + L(x-a) + r(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{d}{dx} f(a) + \frac{r(x)}{x-a}$$

$$\text{n.v. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{d}{dx} f(a) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} f(a) = \frac{d}{dx} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x-a} = 0 \quad \square$$

Def. $f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt
total differenzierbar \Leftrightarrow

f total diff. für alle $a \in D$.

Bemerk.: Alternative Schreibweise

Sei $x := a + h$ (x, a
Dann gilt $h := x - a$)

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + L(h) + r(a+h)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} \stackrel{0}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

d.h. f ist total diff. in $a \Leftrightarrow$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h) \text{ u.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Bemerk. Sei $L = (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
eine $m \times n$ -Matrix u.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$L(x) = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

Sei $x = e_k \Rightarrow L(e_k) = a_k$

Anwend. auf $Df(a) = L = (a_1, \dots, a_n)$

$$\Rightarrow Df(a)(e_k) = a_k$$

Nächster Schritt: Berechnung von $Df(a)(e_k)$

und damit Berechnung des totalen
Differentials $Df(a)$!

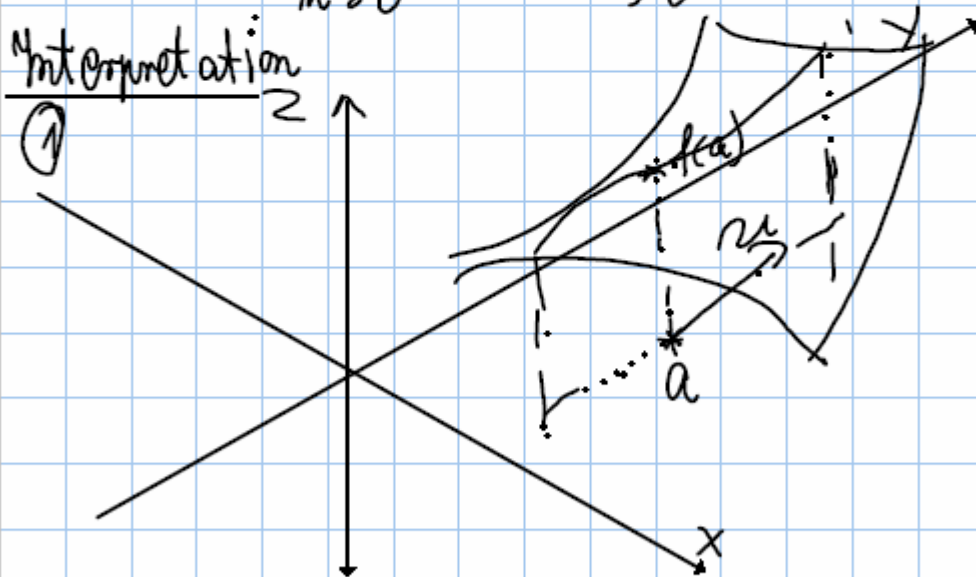
Def. Richtungsableitung von f in a
in Richtung $u \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Richtungsabl. } f'(a, u) = \frac{\partial}{\partial u} f(a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$$

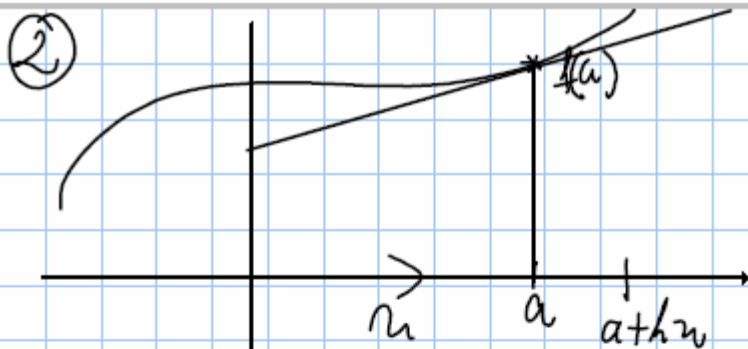
Interpretation

①



$$f: \mathbb{R}^2 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = z$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h} = \frac{\partial}{\partial u} f(a)$$

Satz $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$
 Sei f ableitbar in a in Richtung u .
 Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u} f_m(a) \end{pmatrix}$$

Beweis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(a+hw) - f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(a+hw) - f_m(a)}{h} \end{pmatrix}$$

Satz f total diff in $a \Rightarrow$
 f ist in allen Richtungen in a
ableitbar u. es gilt
 $f'(a, u) = Df(a)(u)$

Spezialfall $u = e_k$

$$f'(a, e_k) = Df(a)(e_k) = a_k$$

d.h. die Spalten a_k der Matrix der
totalen Ableitung $Df(a)$ sind die
Richtungsableitungen von f in a in
Richtung e_k .