

Def. Geg. $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad x \mapsto f(x)$
und $a \in D$ (innerer Pkt)

f ist in a total differenzierbar \Leftrightarrow
def.

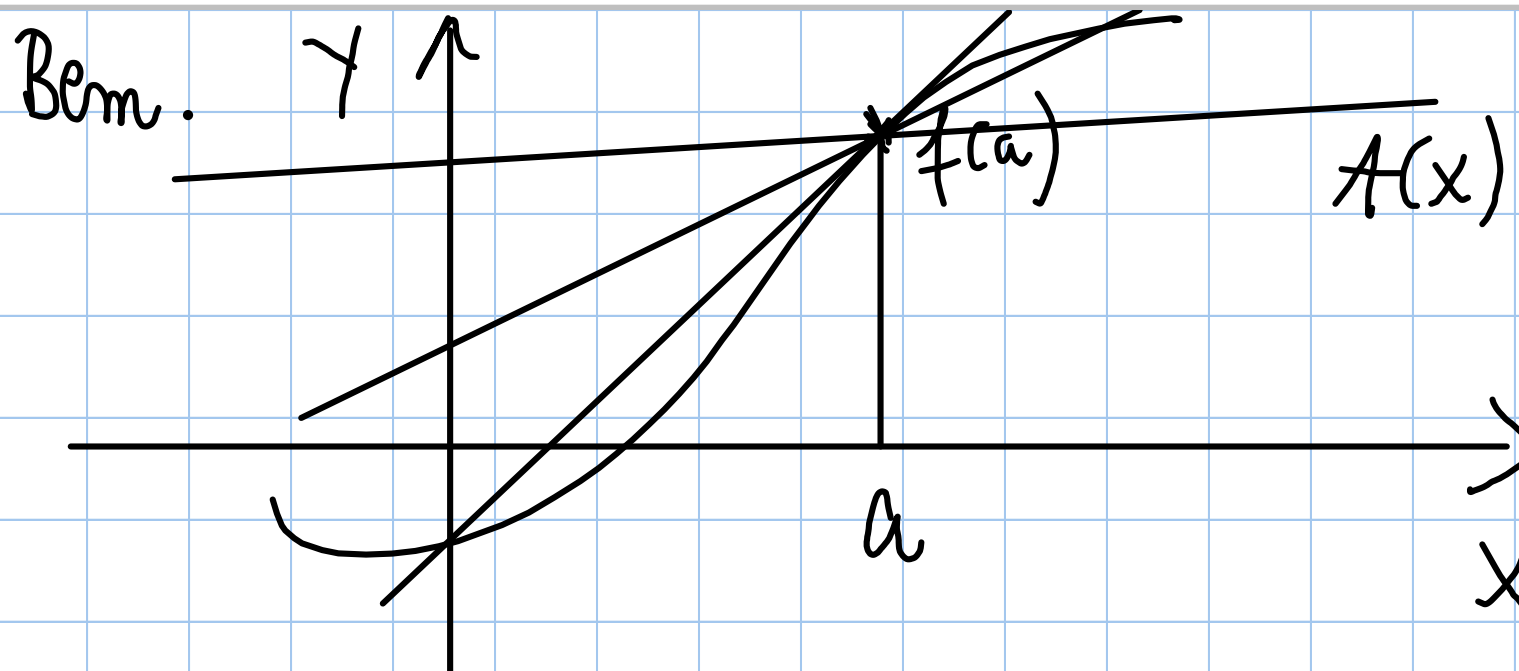
Es ex.

① lineare Abb. $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

② Abbildung $r: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|r(x)\|}{\|x-a\|} = 0$$

$L = Df(a)$ totales Differential
von f in a .



$$f(x) = \underbrace{A(x)}_{f(a)} + r(x)$$

$$f(a) + k(a-x) \quad \square$$

$$\text{Def. } f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

f ist diff. in $a \in D$ (a innerer Pkt)

in Richtung $u \in \mathbb{R}^n \iff$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} \text{ ex.}$$

Schreibweise $\frac{\partial}{\partial u} f(a) = f'(a, u).$

Satz f total differenzierbar in $a \Rightarrow$
 f ist in allen Richtungen in a
differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} f(a) = Df(a)(u)$$

Beweis. Sei f total diff in a d.h.

$$\forall_{x \in D} f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x)$$

mit $x = a + hu$ $h \in \mathbb{R}$ folgt

$$f(a+hu) = f(a) + hL(u) + r(a+hu)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} = L(u) + \frac{r(a+hu)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} = L(u) + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(a+hu)}{h}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} f(a) = L(u) = Df(a)(u) \quad \square$$

Spezialfall

$$u = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Stelle}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_k} f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h e_k) - f(a)}{h}$$

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

$$h e_k = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)$$

$$a + h e_k = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Bemerk. $g: \mathbb{R}^n \ni D \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{Da } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow a} g_1(x) \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow a} g_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_k} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial e_k} f_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial e_k} f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_k} f_i(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f_i(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Streikweise $\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(a) := \frac{\partial}{\partial e_k} f_i(a)$

heißt die k -te partielle Ableitung von f_i in a

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} f_1(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_k} f_m(a) \end{pmatrix}}$$

$$\textcircled{w) \quad L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$L = \left(a_1, \dots, a_n \right) \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$L(x) = x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n a_n$$

$$L(e_k) = a_k$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = L(e_k) = a_k$$

$$L = Df(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \right)$$

Definition

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(a) & & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(a) \end{pmatrix}$$

heißt Jacobi Matrix von f in a

Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n=3; m=1$$

$$f(x, y, z) = e^{x+2y} + 2x \sin(z)$$

$$Df(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{x+2y} + 2x \sin(z)) = e^{x+2y} + 2 \sin(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{x+2y} + 2x \sin(z)) = 2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (e^{x+2y} + 2x \sin(z)) = 2x \cos(z)$$

$$Df(x,y,z) = (e^{x+2y} + 2 \sin(z), 2e^{x+2y}, 2x \cos(z))$$

Gleichung der Tangentialebene in \tilde{a}

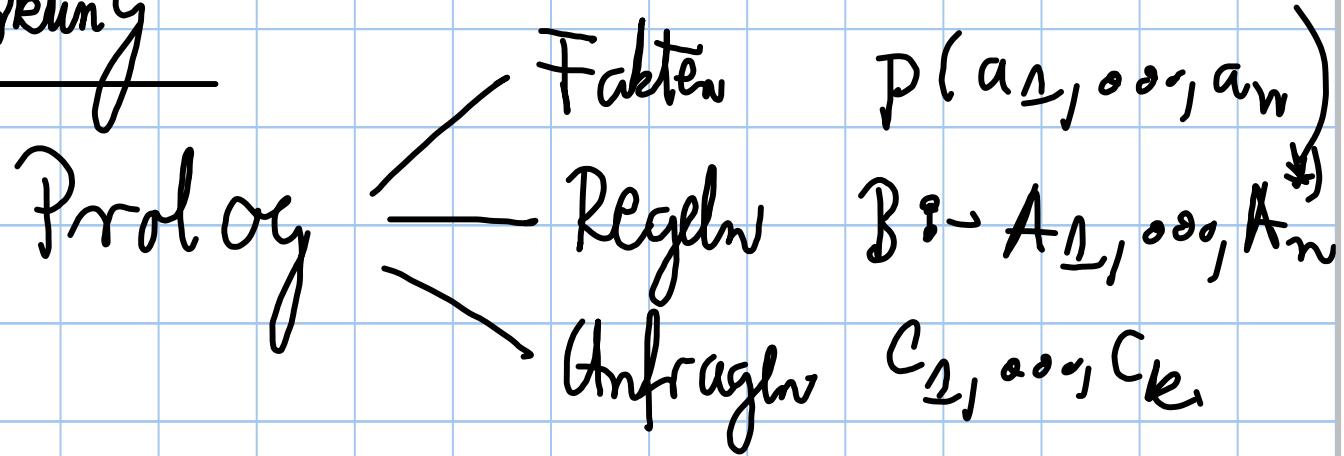
$$t(\tilde{x}) := f(\tilde{a}) + Df(\tilde{a})(\tilde{x} - \tilde{a})$$

$$\text{mit } a = (a, b, c) \quad \text{u. } \tilde{x} = (x, y, z)$$

erhalten wir

$$t(x,y,z) = e^{a+2b} + 2a \sin(c) + (e^{a+2b} + 2 \sin(c), 2e^{a+2b}, 2a \cos(c)) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

Bemerkung



*) Wenn A_1 u. A_2 u. \dots u. A_n , dann B

Prolog Schreibweise

$$\frac{d}{dx} f(x) = \text{diff}(f(x), \frac{d}{dx} f(x), x)$$

Beispiel $f(x) = \lambda x \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \lambda$

Fakt $\text{diff}(\lambda x, \lambda, x)$.

Fakten

- 1) $f(x) = c$ $f'(x) = 0$
- 2) $f(x) = \lambda x$ $f'(x) = \lambda$
- 3) $f(x) = x^n$ $f'(x) = n x^{n-1}$
- 4) $f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$
- 5) $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$.

Regeln

Satz $f, g: \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$1) (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$2) (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

$$\textcircled{1} \text{ u. } \textcircled{2} \quad C_1(I, \mathbb{R}) \longrightarrow C_0(I, \mathbb{R})$$

ist eine $f \mapsto f'$ lineare Abbildung

$$3) (fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Prolog $\text{diff}(F, DF, x)$

Beispiele $\frac{d}{dx} x = 1 \equiv \text{diff}(x, 1, x)$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \equiv$$

$$\text{diff}(F + G, D + DG, x) :-$$

$$\text{diff}(F, DF, x), \text{diff}(G, DG, x).$$

Aufgaben: geg. $f(x)$. Berechnung von $\frac{d}{dx} f(x)$: Prologanfrage $\text{diff}(f(x), DF, x)$.
Prolog gibt $DF = \frac{d}{dx} f(x)$ aus.

Spezialfälle von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

$$\textcircled{1} \quad f: \mathbb{R} \ni [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R}^n \ni D \longrightarrow \mathbb{R}$$

an $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \text{Def. } Df(a) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \right) \\ &= \text{grad } f(a) \quad \underline{\text{Gradient von } f \text{ in } a} \end{aligned}$$

$$Df(a) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$$

\mathbb{R}^n Eukl. Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

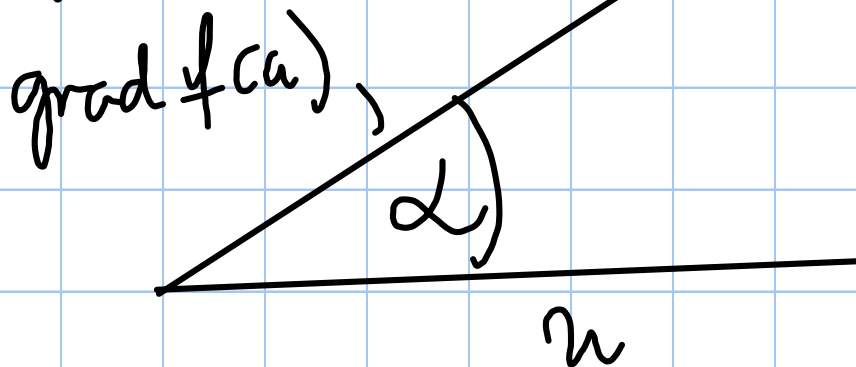
$$\begin{aligned} Df(a)(u) &= \langle Df(a), u \rangle = \langle \text{grad } f(a), u \rangle \\ &= \text{grad } f(a) \cdot u \end{aligned}$$

Bem. Cauchy-Schwarzsche Ungl. \Rightarrow

$$\frac{\sigma(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \cos(\alpha_{x, y})$$

$$> \sigma(x, y) = \|x\| \|y\| \cos(\alpha_{x, y})$$

$$> \text{grad } f(a) \cdot u = \|\text{grad } f(a)\| \|u\| \cos(\alpha)$$



$$\frac{\partial}{\partial n} f(a) = L(u) = Df(a)(u)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} f(a) &= Df(a)(u) = \text{grad } f(a) \cdot u \\ &= \|\text{grad } f(a)\| \|u\| \cos(\alpha) \end{aligned}$$

o.E.d.A. $\|u\| = 1.$ \rightarrow

$$\frac{\partial}{\partial n} f(a) = \|\text{grad } f(a)\| \cos \alpha.$$

Die Richtungsabl. $\frac{\partial}{\partial n} f(a)$ hat den größten Wert für $\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} f(a) = \|\text{grad } f(a)\|$$

"Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs an!"

Das Gradientenverfahren zur Bestimmung von Maximum (oder Minimum).

Ausgehend von einem Startwert x_0 bestimmt man in Richtung von $\text{grad } f(x_0)$ (bzw. $-\text{grad } f(x_0)$) einen Punkt $x_1 := x_0 + h \text{ grad } f(x_0)$ mit einer dem Problem angepassten Schrittweite $h > 0$ ($h < 0$). Im Falle $f(x_1) < f(x_0)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_0)$) ist man zu weit gegangen. Man versucht es mit halber Schrittweite $x_1 = x_0 + h/2 \text{ grad } f(x_0)$.

allgemein $x_{n+1} := x_n + h \text{ grad } f(x_n)$

