



Hölders Axiome des Messens

Die Axiome der Quantität und die
Lehre vom Maß



Inhaltsverzeichnis

- Einführung
- Die Axiome
 - Einfache Folgerungen aus den Axiomen
- Vervielfachung von Größen
- Das archimedische Axiom
- Das kommutative Gesetz der Addition



Inhaltsverzeichnis

- Rationale und Irrationale Zahlen
- Maßzahl
- Commensurable Größen
- Änderung der Einheit
- Existenz einer Größe
- Multiplikation der Größe
- Ausblick



Einführung

- Axiome der Arithmetik
- Helmholtz, Grassmann
 - Lehre der Addition der ganzen Zahlen als Axiom der Arithmetik.
- Hölders gegenteilige Auffassung



Die Axiome

1. Wenn zwei Größen a und b gegeben sind, so ist entweder a mit b identisch ($a=b$, $b=a$), oder es ist a größer als b , und b kleiner als a ($a>b$, $b<a$), oder umgekehrt b größer als a , und a kleiner als b ; diese drei Fälle schließen sich (gegenseitig) aus.



Die Axiome

2. Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.
3. Zwei Größen a und b , die auch identisch sein können, ergeben in einer bestimmten Reihenfolge eine eindeutig bestimmte Summe $a+b$.
4. $a+b$ ist größer als a und größer als b .
5. Ist $a < b$, so gibt es ein x so, dass $a+x=b$, und ein y so, dass $y+a=b$.



Die Axiome

6. Es ist stets $(a+b)+c=a+(b+c)$.
7. Wenn alle Größen in zwei Klassen so eingeteilt sind, dass jede Größe einer und nur einer Klasse zugewiesen ist, dass jede Klasse Größen enthält, und jede Größe der ersten Klasse kleiner ist als jede Größe der zweiten, so existiert eine Größe φ derart, dass jedes $\varphi' < \varphi$ zur Ersten, und jedes $\varphi'' > \varphi$ zur Zweiten Klasse gehört. φ selbst kann je nach dem gegebenen Fall, zur einen oder zur anderen Klasse gehören.



Die Axiome (kompakt)

a, b, c seien Größen (von Null verschieden)

1. $a < b, a = b, a > b$
2. Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.
3. $a + b$ ist durch a und b eindeutig bestimmt
4. $(a + b) > a$ und $(a + b) > b$
5. Ist $a < b \rightarrow$ es gibt ein x so, dass $a + x = b$.
6. Assoziativgesetz gilt



Vervielfachung

- Wir legen die Vervielfachung einer Größe eindeutig fest durch die Definition

$$n \cdot a = (n - 1) \cdot a + a$$

- In Axiom 6 wird das Assoziativgesetz gefordert (für 3 Größen)
Verallgemeinert gilt es für beliebig viele. (Bsp. Tafel)

- Folgerungen aus der Definition

$$\rightarrow m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$$

Aus dieser Gleichung folgt (mit Axiom 4)

$(m+n) \cdot a > m \cdot a$ (mit $n > 0$)

$m \cdot a > m' \cdot a$ oder $m \cdot a = m' \cdot a$ oder $m \cdot a < m' \cdot a$

Je nachdem, wie m' gewählt wurde



Vervielfachung

- Zudem folgt:
Ist $ma=mb \rightarrow a=b$
- Nimmt man eine beliebige Größe a und eine beliebige Zahl n , so existiert immer ein b mit $a > n*b$ (dieses ist jedoch nicht eindeutig bestimmt)



Archimedisches Axiom

- Das Archimedische Axiom ist in diversen Variationen in Gebrauch
- Wir beweisen folgende:

„Seien a, b zwei Größen mit $a < b$, dann gibt es eine Zahl n , so dass gilt: $n \cdot a > b$ “

(Bew. Tafel)



Das kommutative Gesetz der Addition

- Das kommutative Gesetz ist eine notwendige Folgerung aus den Axiomen 1-6

- Beweis!

- **Folgerung:** (zusammen mit Assoziativgesetz)

$$(a+b)+(a+b)+(a+b)+\dots=(a+a+a+\dots)+(b+b+b+\dots)$$

Es gilt also:

$$m(a+b)=ma+mb$$



Rationale Zahlen

- Definition: Bruch

Man nennt $\frac{m}{n}$ einen Bruch, wenn m, n positive, ganze Zahlen sind. Weiter nennt man m den *Zähler* und n den *Nenner*

Die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ sind gleich, wenn gilt $m \cdot n' = m' \cdot n$ (analog größer/kleiner)

- Definition: rationale Zahl

Man nennt sämtliche Brüche die Menge der rationalen Zahlen (auch möglich: $2/2$ etc.)

Sämtliche arithmetischen Gesetze gelten auch hier.



Der Dedekind'sche Schnitt

- Zerlegung der rationalen Zahlen in zwei Teilmengen, für die gilt:

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

$$A \cup B = \mathbb{Q} ; A \cap B = \emptyset$$

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a < b$$

- z.B. Die Zahl 1: $\{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 1 \}$

Allgemein „Schnitt“ an der Tafel



Irrationale Zahlen

- Definition:

Ein Schnitt, der keine kleinste obere Zahl enthält, wird irrationale Zahl genannt.



Maßzahl

- Definition:
Eine Maßzahl ist eine Zahl, die das Verhältnis zwischen zwei Größen a, b angibt.

Man sagt, die Größe a wird durch die Größe b gemessen.

- Mathematisch ausgedrückt:
Sind a, b zwei Größen, dann wissen wir, dass jeweils deren Vielfaches eindeutig bestimmt ist.

Nun suchen wir uns μ, ν so, dass folgende Ungleichung gilt: $\nu a > \mu b$ Man nennt jetzt $\frac{\mu}{\nu}$ einen unteren Bruch bzgl. des Verhältnisses $a:b$ (analog: oberer Bruch)



Maßzahl

- Behauptung: Jeder untere Bruch ist kleiner als jeder obere Bruch
- Beweis
- Folgerung:
Sind zwei Brüche gleich, sind beide entweder obere oder untere Brüche.
Eine rationale Zahl ist also entweder eine obere und eine untere bzgl. des Verhältnisses $a:b$

Wichtig: zu jedem unteren Bruch gibt es einen größeren unteren Bruch!
(Es gibt also keinen größten unteren Bruch)

Definition Maßzahl:

- Zu jedem Größenverhältnis $a:b$ gehört ein eindeutig bestimmter Schnitt, der $[a:b]$ genannt wird. Diese Zahl nennt man Maßzahl, b nennt man die Einheit, in der die Größe a gemessen wird.



Commensurable Größen

- Definition von *commensurabel*:

Zwei Größen a und b werden commensurabel genannt, wenn eine Größe c existiert, von der sowohl a als auch b ein Vielfaches ist.

- Einführung des Begriffs Supremum



Änderung der Einheit

- Im Kapitel „Maßzahl“ haben wir eingeführt, dass eine Größe a durch eine Größe b gemessen wird. Oft ist es jedoch sinnvoll, die Einheit zu ändern.

- Mathematisch:

Man wähle beliebige Größen a, b, c und bilde die Schnitte $[a:b]$ und $[b:c]$.

Diese Schnitte repräsentieren Zahlen, also kann man sie multiplizieren und erhält einen dritten Schnitt.

Dieser lautet $[a:c]$ und gibt die Maßzahl an, die man erhält, wenn man die Größe a durch die Größe c misst.



Existenz einer Größe

Erste Klasse

- jede Größe x , die zusammen mit jedem passenden unteren Bruch $\frac{\mu}{v}$ des gegebenen Schnitts χ der folgenden Ungleichung genügt:

$$vx < \mu b$$

Zweite Klasse

- Jede andere Größe, also jede Größe x' dieser Klasse mit jedem unteren Bruch $\frac{\mu}{v}$ des Schnitts χ mit Relation:

$$vx' \geq \mu b$$



Multiplikation von Größen

- Definition:

Wir definieren die Multiplikation von Größen über deren Maßzahlen.

Dazu:

1. Wähle die Größen a, a', b bel.
2. Bilde die Maßzahlen $[a:b], [a':b]$

Nun definieren wir $a * a' = x$ als
 $[a:b] * [a':b] = [x:b]$.



Folgerungen

- Das Kommutativgesetz gilt.
- Das Assoziativgesetz gilt.
- Das Distributivgesetz gilt.



Ausblick

- Die Axiome 1-7 definieren den sog. Hölderbereich.
- Dieser ist in natürlicher Weise eine geordnete Gruppe.
- Man kann folglich einen injektiven Homomorphismus
 $f: \text{Hölderbereich} \rightarrow \mathbb{R}$ bilden.



ENDE
