7. Bestandsmanagement II

Bestellmengen-Optimierung bei unbekannter zukünftiger Nachfrage

Problemstellung

- Basismodell

Kostenarten

- Situation
  - variable Bestellkosten pro Zeitung: c=1,-- EUR
  - Rückgabeerlöse pro Zeitung: v=0,50 EUR
  - Verkaufspreis pro Zeitung: r=3,-- EUR
- Überbestandskosten (pro Zeitung)
  - c_o := c – v = 1,-- EUR – 0,50 EUR = 0,50 EUR / Stck.
- Unterbestandskosten (entgangener Gewinn)
  - c_u := r – c = 3,-- EUR – 1,-- EUR = 2,-- EUR / Stck.

Erwartete Über- & Unterbestandskosten

- Annahme: Bestellmenge S=4 Zeitungen

Nachfragen (Stück)	Wahrschein -lichkeit	Fehlbestand	Über- bestand	erwarteter Überbestand	erwarteter Unterbestand
y	p_y	Max(0;y-S)	$[S-y]^+$	$p_y*[S-y]^+$	$p_y*[y-S]^+$
0	0,05	0	4	0,20	0
1	0,10	0	3	0,30	0
2	0,20	0	2	0,40	0
3	0,30	0	1	0,30	0
4	0,20	0	0	0,00	0
5	0,10	1	0	0,00	0,1
6	0,05	2	0	0,00	0,1
			Summe	1,20	0,20
			Kosten/Stck.	0,50 €	2,00 €
			Kosten	0,60 €	0,40 €
			Summe		1,00 €

Kostenfunktion

- Erwartete Überbestandsmenge

$$E[S-Y]^+ = \sum_{y=0}^{S} (S-y) \cdot p_y$$

- Erwartete Unterbestandsmenge

$$E[Y-S]^+ = \sum_{y=S}^{\infty} (y-S) \cdot p_y$$

- Erwartete Kosten bei Bestellmenge S

$$Z(S) = c_o E[S-Y]^+ + c_u E[Y-S]^+$$

- gesucht ist S, so dass Z(S) minimal wird

Jörn Schönberger · jsb@uni-bremen.de

- Normalverteilte Nachfrage

Zufallsvariable

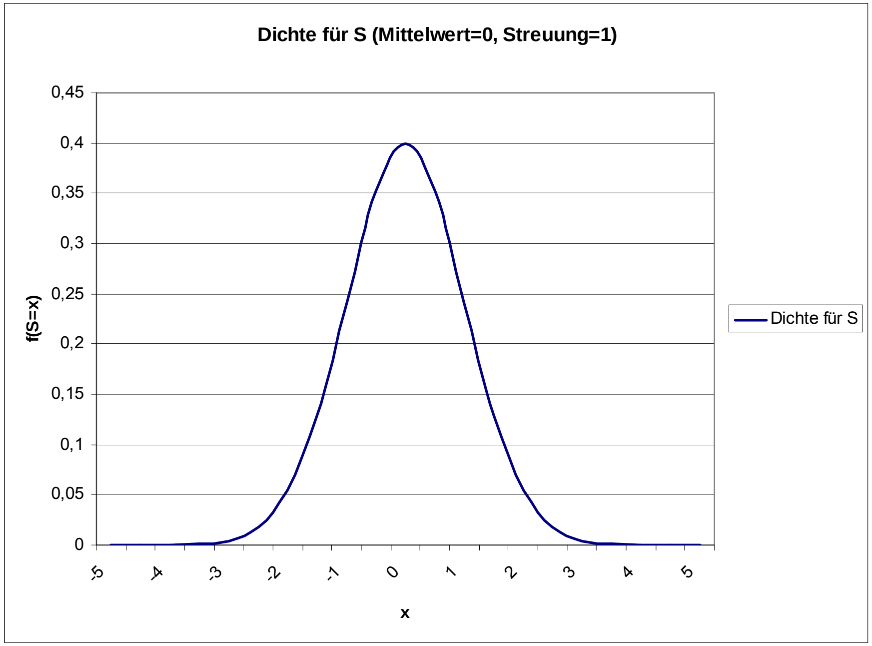
- Platzhalter für ein Ereignis
- Beispiel für eine Zufallsvariable Y:
  - Y := “Nachfrage nach Zeitschrift in Stück”
  - Ereignis: “es werden 4 Zeitschriften nachgefragt” (Y=4)
- P(Y=4): “Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 Zeitschriften nachgefragt werden”
- Erwartungswert E(Y): “gewichteter Durchschnitt”
- Standardabweichung: “Streuung von Y um E(Y)”

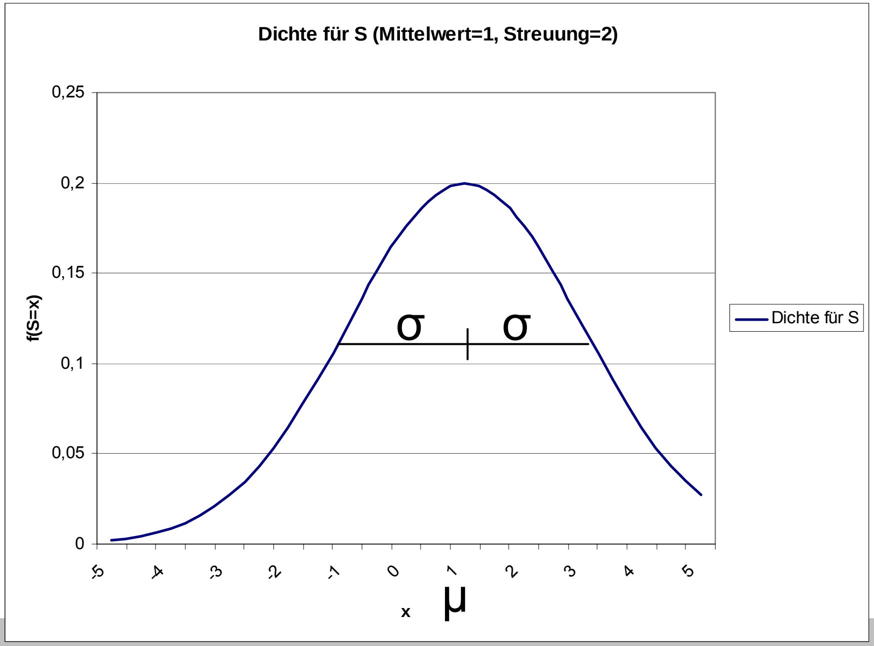
Dichtefunktion

- Funktion, die jedem Wert einer Zufallsvariablen einen numerischen Wert zuordnet.

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Erwartungswert: μ
- Standardabweichung: σ

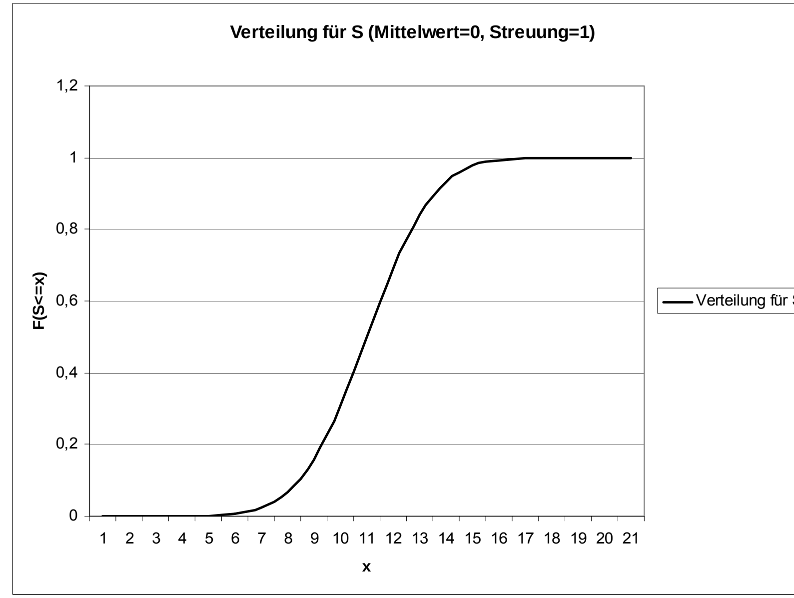


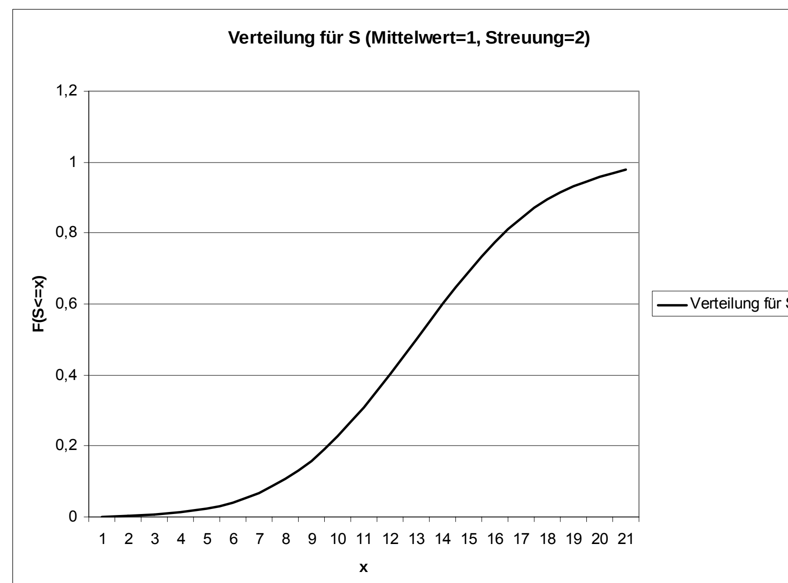


Verteilungsfunktion

- Funktion, die jedem Wert x die Wahrscheinlichkeit zuweist, mit der die Zufallsvariable S einen Wert kleiner oder gleich x annimmt.

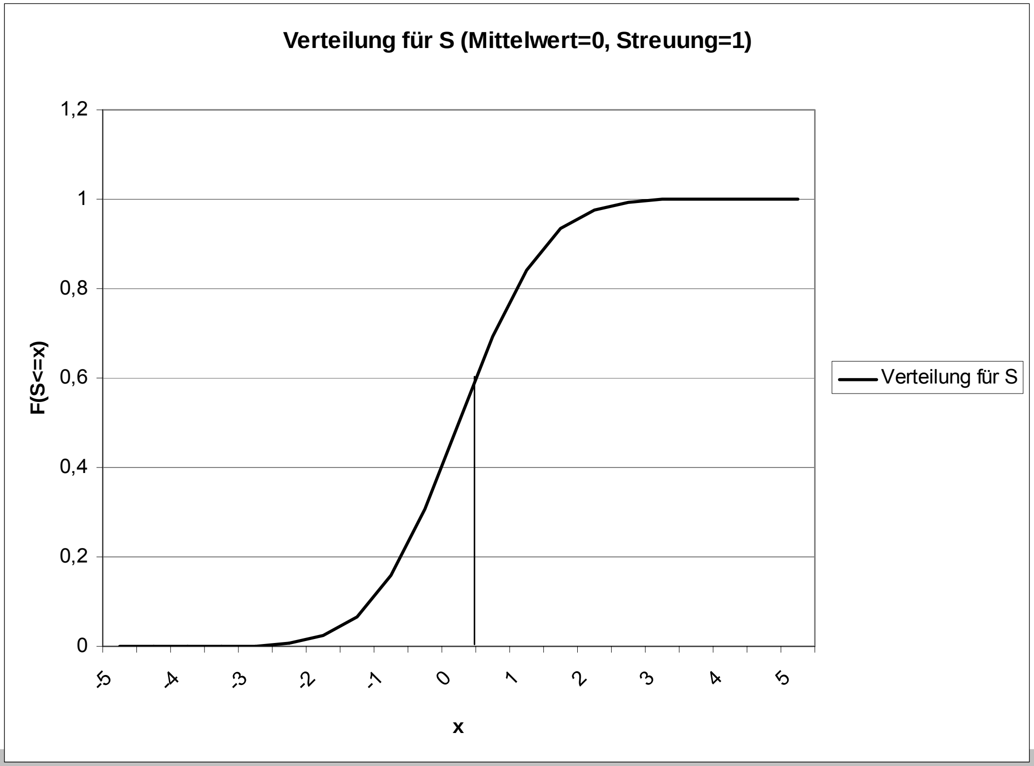
$$F(x) := P(S \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$





Quantilsfunktion

- Umkehrfunktion F^{-1} der Verteilungsfunktion F
  - $F^{-1}(F(x)) = x$
  - Verwendung von Tabellen
  - vgl. Thonemann, S. 278ff
- Bsp.: $F^{-1}(0.8) \approx 0{,}85$



- Optimierung der Bestellpolitik

Ermittlung des Optimums

- Mathematischer Satz (vgl. Thonemann, S.274)
  - *S^*: optimale Bestellmenge*
  - *F angenommene Verteilung*

$$F(S^*) = \frac{c_u}{c_u + c_o}$$

CR = Critical Ratio

- Anwendung der Umkehrfunktion

$$S^* = F^{-1}\left(\frac{c_u}{c_u + c_o}\right)$$

Anwendung bei Normalverteilung

- Situation
  - Nachfrage Y ist Normalverteilt
  - Erwartungswert μ
  - Standardabweichung σ
- $F_{01}^{-1}(z)$ kann aus Tabelle abgelesen werden

$$S^* = \mu + F_{01}^{-1}\left(\frac{c_u}{c_u + c_o}\right) \cdot \sigma$$

Beispiel

- Erwartungswert μ=100 Zeitungen
- Standardabweichung σ=20 Zeitungen
- Kosten
  - c_u = 2,- EUR
  - c_o = 0,50 EUR
  - critical ratio = 0.8
- gesucht ist z, so dass $F_{01}(z) = 0.8$
- Quantils-Tabelle: F_{01} (0.84)=0.7995, also z=0.84
- S* = 100 Stück + 0.84·20 Stück ≈ 117 Stück

Übungsaufgabe

- Erwartungswert μ=75 Zeitungen
- Standardabweichung σ=25 Zeitungen
- Kosten
  - c_u = 2,- EUR
  - c_o = 0,75 EUR
- Bei welcher Bestellmenge werden die erwarteten Kosten minimiert?
- Lösung
  - $F_{01}(z)$ = 2,- EUR/2,75 EUR ≈ 0,727, d.h. z ≈ 0,60
  - S^* = 75 + 0,6*25 ≈ 90 Zeitungen

- Servicegrade

Servicegrade

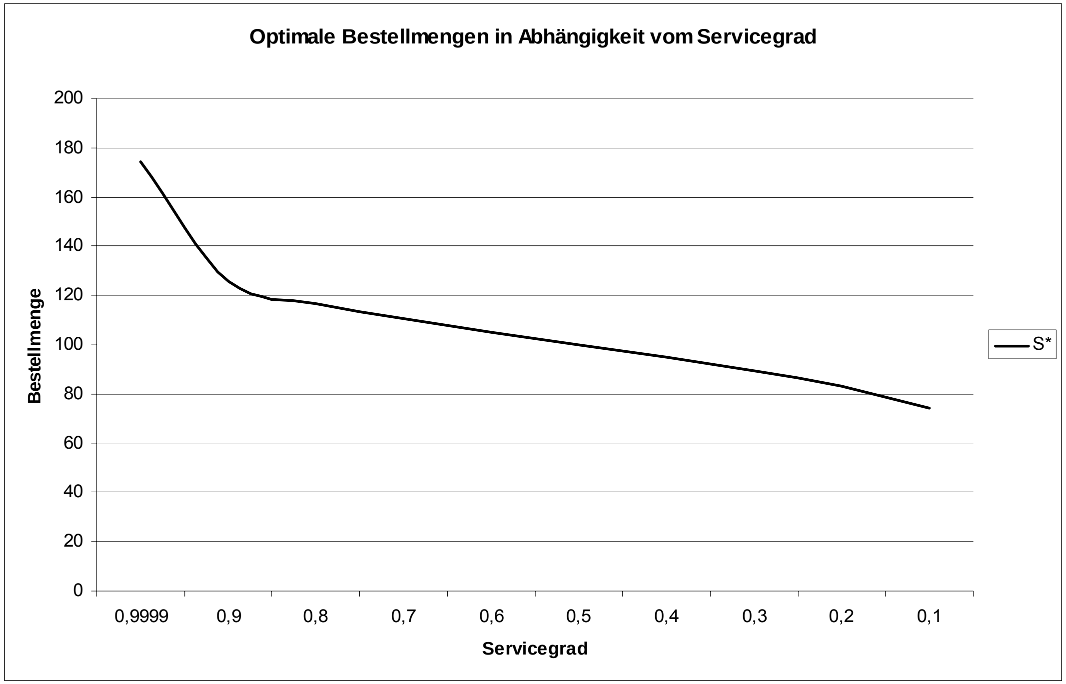
- Minimierung der Bestellmenge
  - Nebenbedingung: Mindestservicegrad
- α-Servicegrad
  - Wahrscheinlichkeit, dass alle Nachfragen erfüllt werden können, muss mindestens α betragen
- β-Servicegrad
  - Anteil aller erfüllten Nachfragen muss mindestens β betragen.

α-Servicegrad

- Minimiere S, wobei $F(S) \geq \alpha$
- $F(S)$ nicht-fallende Funktion von S
- wenn $F(S)=\alpha$, dann ist S optimale Bestellmenge, d.h. $S^* = F^{-1}(\alpha)$
- $S^* = \mu + f_{01}^{-1}(\alpha) \cdot \sigma$

α-Servicegrad - Beispiel

- normalverteilte Nachfrage
  - Erwartungswert μ=100 Zeitungen
  - Standardabweichung σ=20 Zeitunge



Zusammenfassung

- Stochasische Daten
- Über- / Unterbestandskosten
- Normalverteilte Zufallsvariable
- Grundmodell mit Zufallsvariablen
- Lösung des Grundmodells
- Servicegrade

Zur Übung

- Aufgabe 7, Kapitel 5, Thonemann, S. 271