10. Produktionsprogramm-Planung

- Problem-Modellierung
- Ansätze zur Problem-Lösung

Jörn Schönberger · jsb@uni-bremen.de

Universität Bremen

Agenda

- Beispiel-Szenario
- Modellierung als Lineares Programm (LP)
- Modell-Lösung
  - graphische Lösung
  - Solver von MS Excel
  - Simplex-Verfahren

- Beispiel-Szenario

Szenario (I/II)

- produzierender Betrieb stellt Produkt A&B her
- Absatzmenge nach oben unbeschränkt
  - pro abgesetztem Stück A: 12,- EUR Gewinn
  - pro abgesetztem Stück B: 8,- EUR Gewinn
- A&B durchlaufen drei Fertigungsstufen
  - Teilefertigung (insgesamt 80 MStd. verfügbar)
  - Vormontage (insgesamt 100 MStd. verfügbar)
  - Endmontage (insgesamt 75 MStd. verfügbar)

Szenario (II/II)

- Arbeitsbelastungen
  - Produkt A

Teilefertigung	4MStd./Stck.
Vormontage	2MStd./Stck.
Endmontage	5MStd./Stck.

  - Produkt B

Teilefertigung	2MStd./Stck.
Vormontage	3MStd./Stck.
Endmontage	1MStd./Stck.

- Wie sieht ein Gewinn-maximales Produktionsprogramm aus, das die vorhandenen Kapazitäten nicht überfordert?

Modellierung (I/IV)

- Darstellung der Entscheidungsspielräume als Entscheidungsvariable

- x_A: herzustellende Menge Produkt A
- x_B: herzustellende Menge Produkt B

Modellierung (II/IV)

- Abbildung der Kapazitätsbeschränkungen in den drei Fertigungsstufen

- (R1) Teilefertigung: $4x_A+2x_B \leq 80$
- (R2) Vormontage: $2x_A+3x_B \leq 100$
- (R3) Endmontage: $5x_A+1x_B \leq 75$
- (R4) Nicht-Negativität: $x_A \geq 0$, $x_B \geq 0$

(x_A, x_B), die R1-R4 genügen heißen “zulässig”

Modellierung (III/IV)

- Bewertung eines Vorschlags (x_A,x_B)
- $Z(x_A,x_B) = 12x_A+8x_B$
- Z wird als “Zielfunktion” bezeichnet
- Gesucht ist ein Vorschlag (x'_A,x'_B),
  - der R1-R4 genügt
  - für den es keinen anderen Vorschlag (y_A,y_B) gibt, so dass $Z(x'_A,x'_B) < Z(y_A,y_B)$.

Modellierung (IV/IV)

- maximiere $Z(x_A,x_B) = 12x_A+8x_B$

  so dass (i) $4x_A+2x_B \leq 80$

  (ii) $2x_A+3x_B \leq 100$

  (iii) $5x_A+1x_B \leq 75$

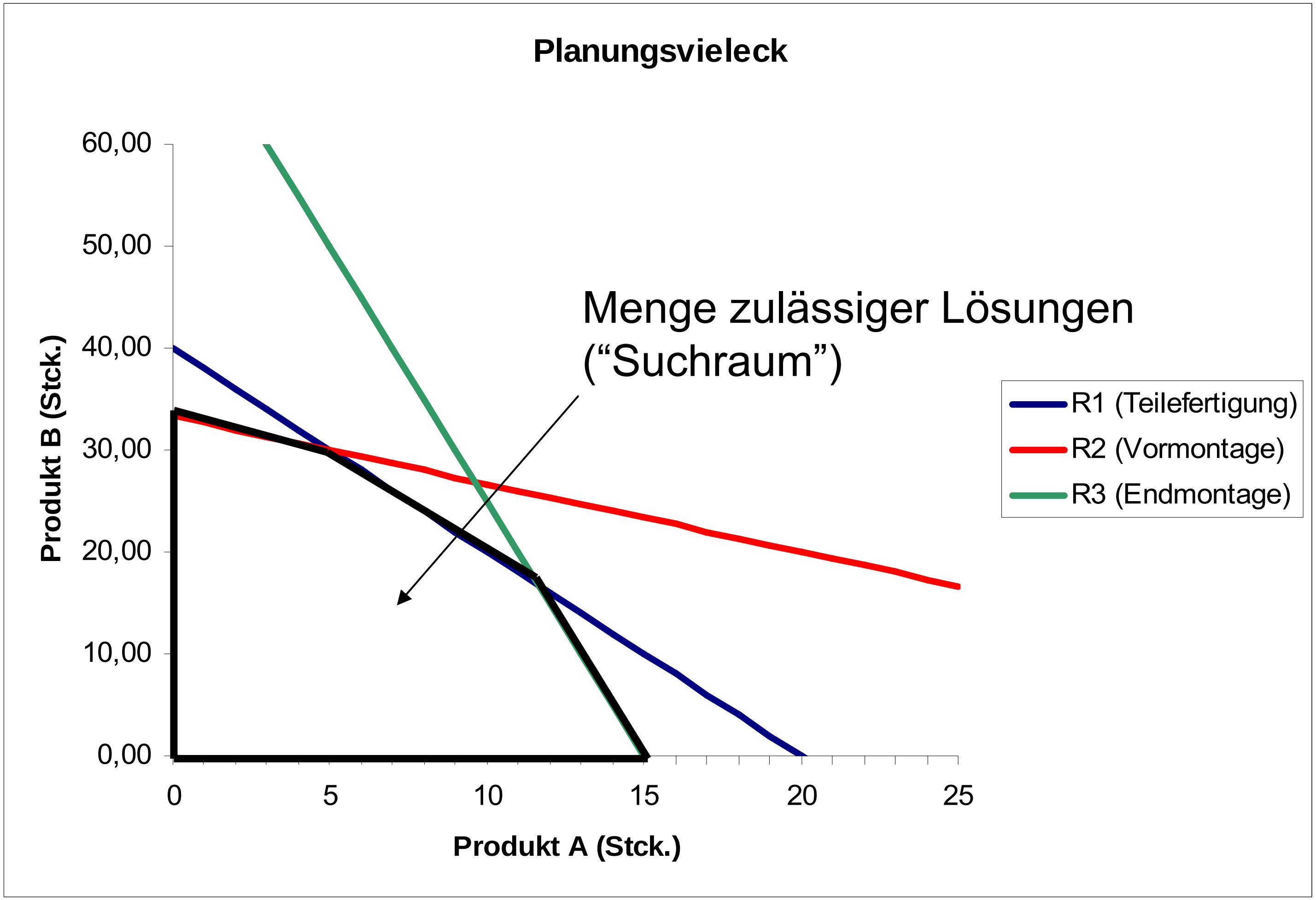
  (iv) $x_A \geq 0$

  (v) $x_B \geq 0$

Übungsaufgabe

- Stellen Sie die Menge zulässiger Vorschläge graphisch dar.
- Welche Lösungen können gewählt werden, wenn ein Gewinn von
  - a) 200 GE erzielt wird?
  - b) 400 GE erzielt wird?
  - c) 300 GE erzielt wird?

Skizze des Suchraums



Modellierung (IV/IV)

- maximiere $Z(x_A,x_B) = 12x_A+8x_B$

  so dass (i) $4x_A+2x_B \leq 80$

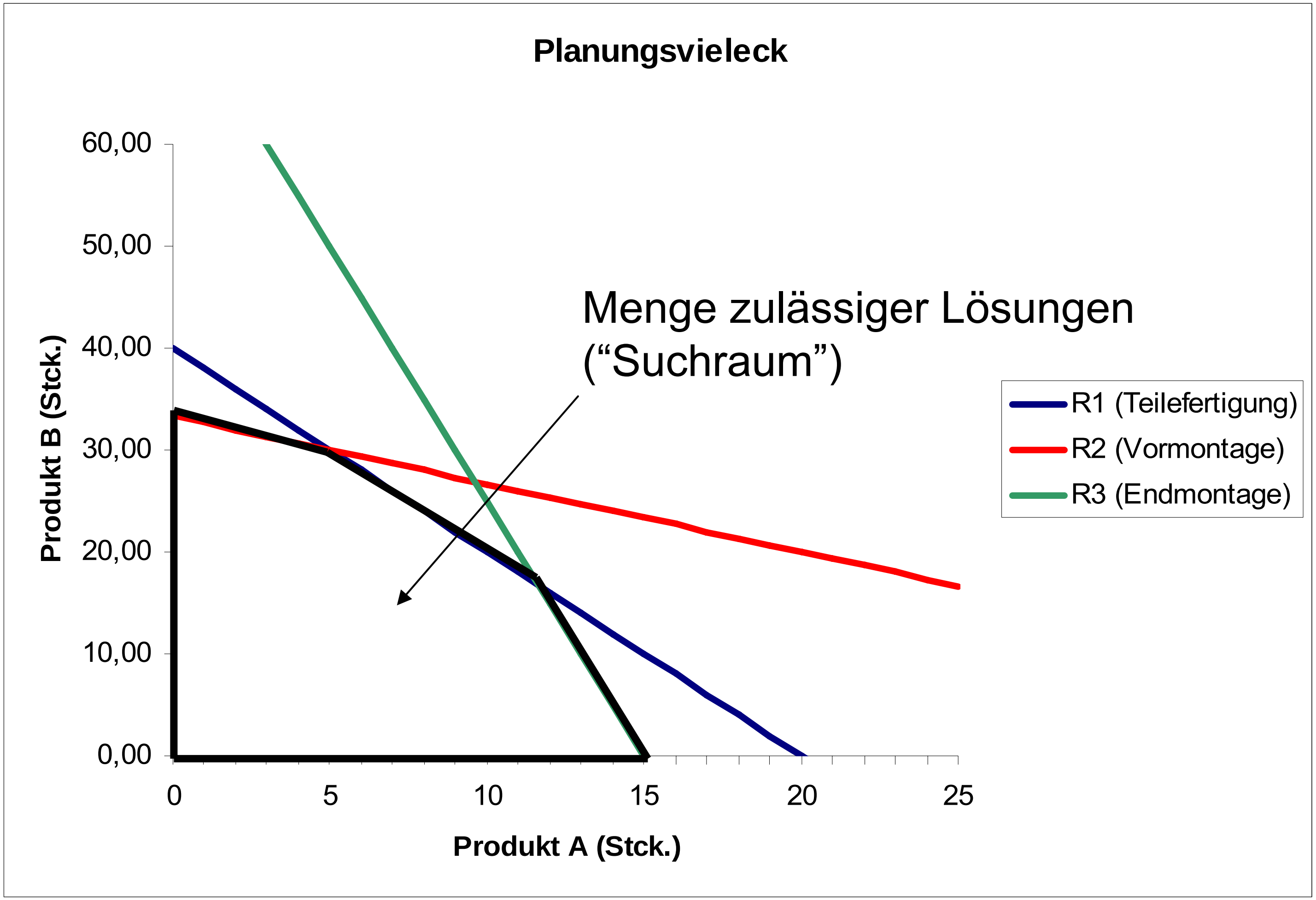
  (ii) $2x_A+3x_B \leq 100$

  (iii) $5x_A+1x_B \leq 75$

  (iv) $x_A \geq 0$

  (v) $x_B \geq 0$

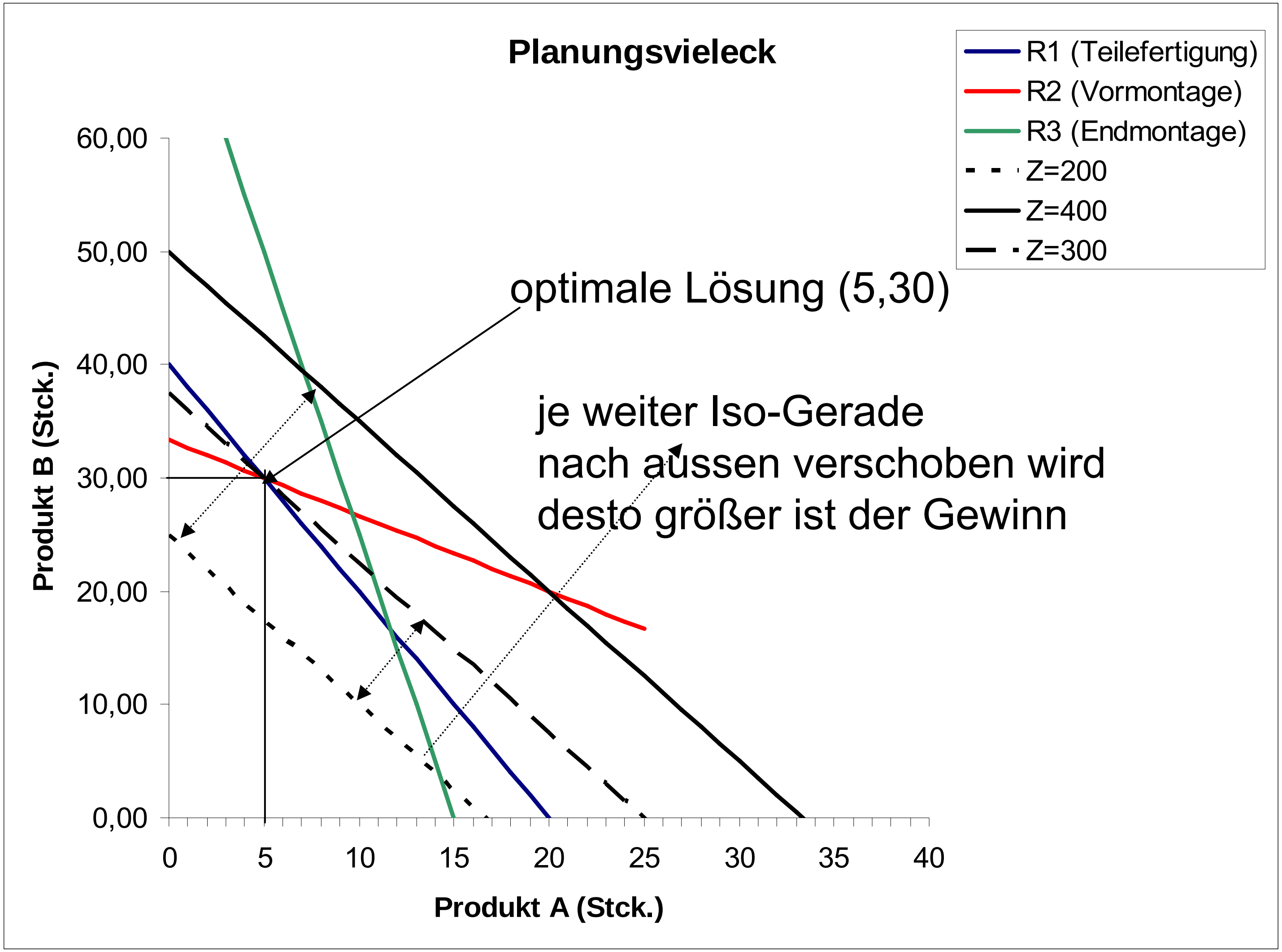
Skizze des Suchraums



Jörn Schönberger · jsb@uni-bremen.de

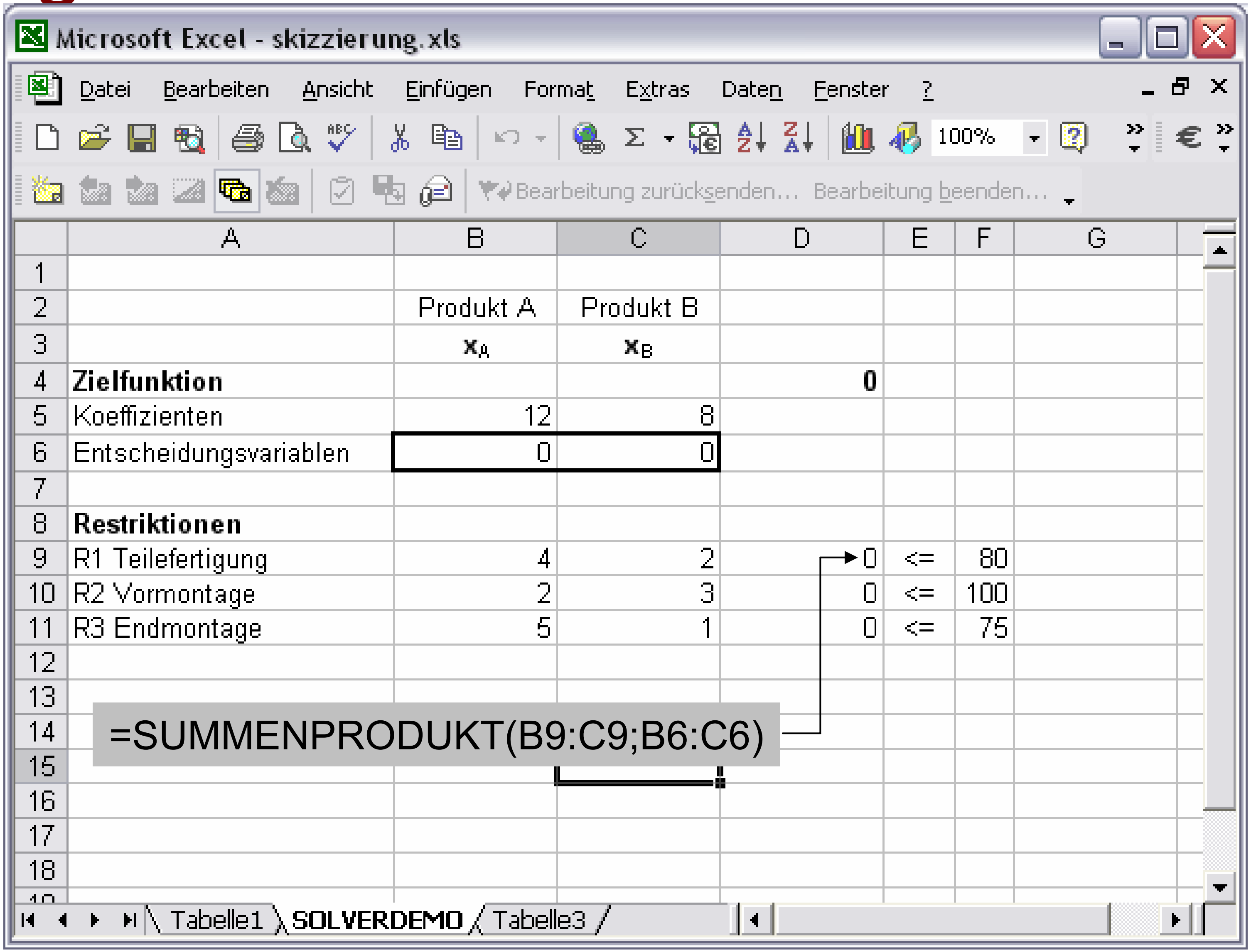
Universität Bremen

Isogewinn-Geraden



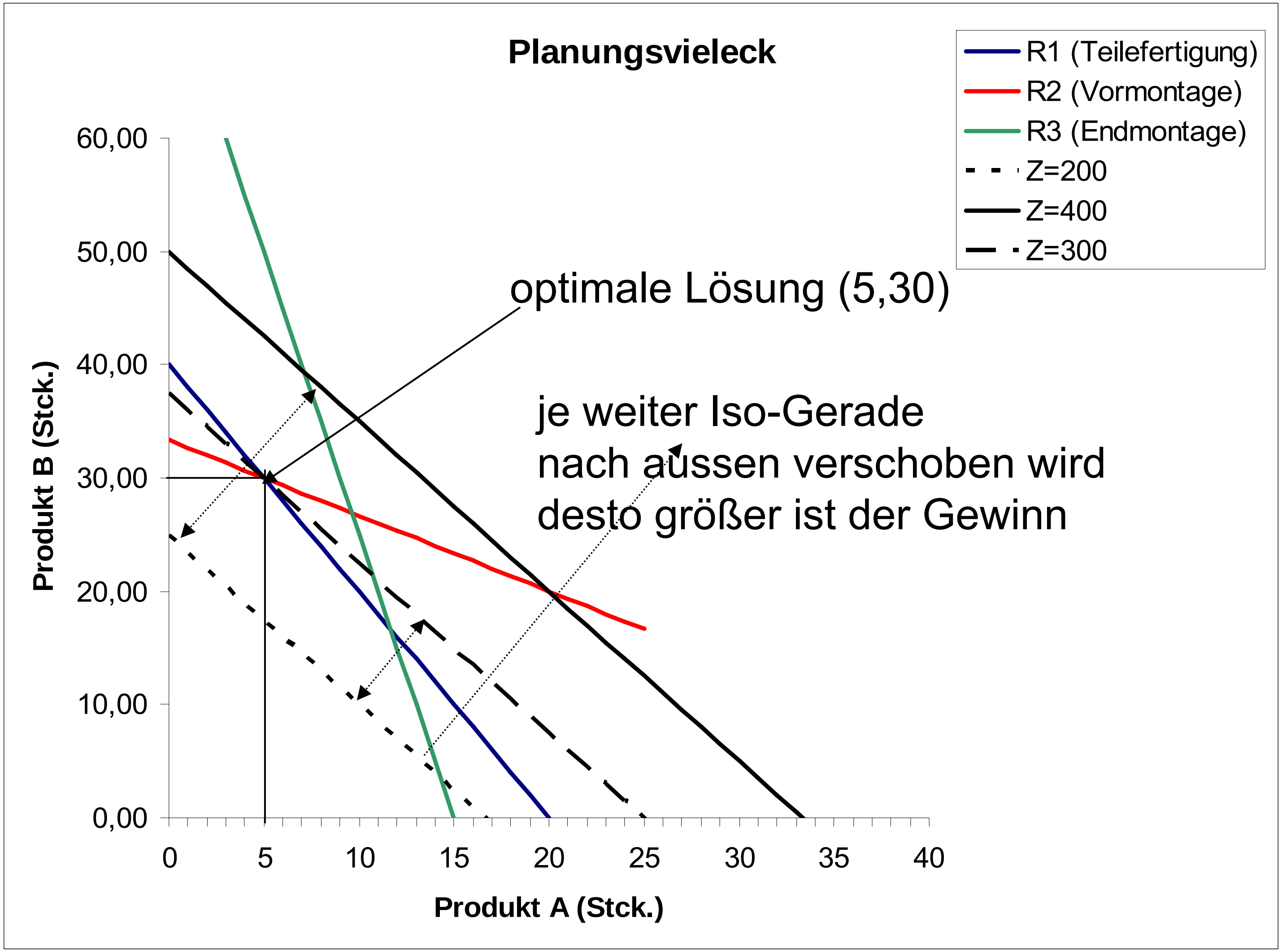
- Lösung des LP mit dem MS Excel-Solver

Eingabe LP in MS Excel



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Produkt A	Produkt B				
3		x_A	x_B				
4	**Zielfunktion**			**0**			
5	Koeffizienten	12	8				
6	Entscheidungsvariablen	0	0				
7							
8	**Restriktionen**						
9	R1 Teilefertigung	4	2	0	<=	80	
10	R2 Vormontage	2	3	0	<=	100	
11	R3 Endmontage	5	1	0	<=	75	

Isogewinn-Geraden



- Lösung mit dem Simplex-Verfahren

Schlupfvariablen

- Ungleichungen werden durch “Schlupfvariablen” zu Gleichungen umgeformt

x_A	x_B		r.S.
4	2	<=	80
2	3	<=	100
5	1	<=	75

$\Leftrightarrow$

x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		r.S.
4	2	1			=	80
2	3		1		=	100
5	1			1	=	75

Basis- und Nichtbasis-variablen

- ein Eckpunkt des Suchraums ist optimal
- mathematischer Satz:
  "Jeder Eckpunkt ist eindeutig durch eine Lösung des erweiterten LP (inkl. Schlupfvar.) darstellbar, in der m (=Anzahl Restriktionen) Komponenten (Nicht-Basisvariablen) auf Null gesetzt sind. Die restlichen Basisvariablen können dann eindeutig bestimmt werden. Eine solche Lösung heißt Basislösung"

Schlupfvariablen

- Ungleichungen werden durch “Schlupfvariablen” zu Gleichungen umgeformt

x_A	x_B		r.S.
4	2	<=	80
2	3	<=	100
5	1	<=	75

⇔

x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		r.S.
4	2	1			=	80
2	3		1		=	100
5	1			1	=	75

Verfahrensidee

- teste sukzessive alle Basislösungen durch
- tausche jeweils eine Basis- gegen eine Nichtbasisvariable aus
- sorge dafür, dass der Austausch zum größtmöglichen Zuwachs der Zielfunktion führt
- stoppe, sobald kein Zuwachs mehr möglich ist (optimale Lösung gefunden)

Initiales Simplextableau

aktuelle Basis

	x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		θ_i
s_1	4	2	1			80	**80/4 = 20**
s_2	2	3		1		100	**100/2 = 50**
s_3	5	1			1	75	**75/5 = 15**
	12	8					

aktuelle Lösung

(0,0,80,100,75)

Zielfunktionswert: Z=0

- Welche EV wird in die Basis aufgenommen? **x_A**
- Welche EV verlässt die Basis? **s_3**

Zweites Simplextableau

aktuelle Basis

	x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		θ_i
s_1		1,2	1		-0,8	20	20/1,2 = 16,67
s_2		2,6		1	-0,4	70	70/2,6 = 26,92
x_A	1	0,2			0,2	15	15/0,2 = 75
	0	5,6			-2,4		

aktuelle Lösung

(15,0,20,70,0)

Zielfunktionswert: Z=180

- Welche EV wird in die Basis aufgenommen? x_B
- Welche EV verlässt die Basis? s_1

Drittes Simplextableau

aktuelle Basis

	x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		θ_i
x_B		1	5/6		-2/3	50/3	---
s_2			-13/6	1	4/3	80/3	20
x_A	1		-1/6		1/3	35/3	35
			-14/3		4/3		

aktuelle Lösung

(35/3,50/3,0,80/3,0)

Zielfunktionswert: Z=273,33

- Welche EV wird in die Basis aufgenommen? s_3
- Welche EV verlässt die Basis? s_2

Viertes Simplextableau

aktuelle Basis

	x_A	x_B	s_1	s_2	s_3		θ_i
x_B		1	-1/4	1/2		30	
s_3			-13/8	3/4	1	20	
x_A	1		3/8	-1/4		5	
			-5/2	-1			

aktuelle Lösung

(5,30,0,0,20)

Zielfunktionswert: Z=300

- keine Verbesserung durch Basiswechsel möglich!
- diese Lösung ist optimal!

Zur Vertiefung

- "Hausaufgabe": Übungsaufgabe in Stud.Ip
- Thonemann (Kap. 6.3)
- Thonemann (Kap. 9.2)

Jörn Schönberger · jsb@uni-bremen.de

Universität Bremen