

# 11. Einsatz- & Tourenplanung

- Probleme des Mitarbeiterereinsatzes
- Probleme des Fahrzeugeinsatzes

# Szenarios



# Einordnung

- kurzfristige Ressourceneinsatzplanung
- Aufgaben & verfügbare Ressourcen sind bekannt
- komplexe Entscheidungsprobleme
  - Zuordnung von Aufgaben zu Ressourcen
  - Reihenfolge-Festlegungen
- Ressourcen: Mitarbeiter / Fahrzeuge

# Zielsetzungen

- Probleme der Ablaufplanung erkennen
  - Einsatzplanung von Mitarbeitern
  - Routenplanung von Fahrzeugen
- Modellierung von Entscheidungsmodell
  - mathematische Optimierungsmodelle
- Ableitung einer “guten” Lösung der Modelle
  - algorithmische Lösungs-Fixierung

# ■ Modellierung von Einsatzplanungsproblemen

# Personaleinsatzplanung

- Zeitintervalle (Schichten) sind vorgegeben
- Ziel: Festlegung welche Arbeitskraft in welcher Schicht arbeitet
- Problem-Charakteristika
  - Auswahl aus mehreren verfügbaren Mitarbeitern
  - alle Perioden müssen abgedeckt werden
  - Einsatzkosten sollen minimiert werden

# Beispiel

**Tabelle 7.9**

## **Uhrzeitabhängiger Bedarf an Mitarbeitern**

Periode	Uhrzeit	Bedarf
1	8 – 12 Uhr	3 Mitarbeiter
2	12 – 16 Uhr	5 Mitarbeiter
3	16 – 20 Uhr	7 Mitarbeiter

# Einsatzplanung

- Einsatzplan gibt an, in welchen Perioden gearbeitet werden muß und in welchen nicht.
- verschiedene Einsatzpläne stehen zur Verfügung
- Einsatzplanung
  - 1. Auswahl an benötigten Einsatzplänen
  - 2. Bestimmung der Anzahl der Mitarbeiter pro Einsatzplan



# Entscheidungsmodell

## ■ Parameter

- $T$ : Anzahl der betrachteten Perioden (Schichten)
- $b_t$ : Mitarbeiterbedarf in Periode  $t$
- $N$ : Anzahl möglicher Einsatzpläne
- $a_n$ : Codierung des Einsatzes  $n$
- $c_n$ : Kosten bei Wahl des Einsatzplans  $n$  pro eingesetztem Mitarbeiter

## ■ Entscheidungsvariable

- $x_n$ : Anzahl der eingesetzten Mitarbeiter in Einsatzplan  $n$

# Beispiel

**Tabelle 7.9**

## **Uhrzeitabhängiger Bedarf an Mitarbeitern**

Periode	Uhrzeit	Bedarf
1	8 – 12 Uhr	3 Mitarbeiter
2	12 – 16 Uhr	5 Mitarbeiter
3	16 – 20 Uhr	7 Mitarbeiter

# Einsatzplan

## ■ Einsatzplan $a_n$

- Vektor mit T Komponenten:  $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{Tn})$
- jede Komponente steht für den benötigten Personalbedarf in einer Periode
- $a_{tn} = 1$ , falls Einsatzplan n in Periode t einen Mitarbeiterereinsatz vorsieht,  $a_{tn} = 0$  sonst.

Tabelle 7.10

Dauer und Kosten durchgängiger Einsatzpläne

Periode	Uhrzeit	Einsatzplan				
		1	2	3	4	5
1	8 – 12 Uhr	•			•	
2	12 – 16 Uhr		•		•	•
3	16 – 20 Uhr			•		•
Kosten		45€	45€	50€	80€	85€

# Entscheidungsmodell

## ■ Parameter

- $T$ : Anzahl der betrachteten Perioden (Schichten)
- $b_t$ : Mitarbeiterbedarf in Periode  $t$
- $N$ : Anzahl möglicher Einsatzpläne
- $a_n$ : Codierung des Einsatzes  $n$
- $c_n$ : Kosten bei Wahl des Einsatzplans  $n$  pro eingesetztem Mitarbeiter

## ■ Entscheidungsvariable

- $x_n$ : Anzahl der eingesetzten Mitarbeiter in Einsatzplan  $n$

# Einsatzplan

## ■ Einsatzplan $a_n$

- Vektor mit T Komponenten:  $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{Tn})$
- jede Komponente steht für den benötigten Personalbedarf in einer Periode
- $a_{tn} = 1$ , falls Einsatzplan n in Periode t einen Mitarbeiterereinsatz vorsieht,  $a_{tn} = 0$  sonst.

Tabelle 7.10

Dauer und Kosten durchgängiger Einsatzpläne

Periode	Uhrzeit	Einsatzplan				
		1	2	3	4	5
1	8 – 12 Uhr	•			•	
2	12 – 16 Uhr		•		•	•
3	16 – 20 Uhr			•		•
Kosten		45€	45€	50€	80€	85€

# Entscheidungsmodell

## ■ Parameter

- $T$ : Anzahl der betrachteten Perioden (Schichten)
- $b_t$ : Mitarbeiterbedarf in Periode  $t$
- $N$ : Anzahl möglicher Einsatzpläne
- $a_n$ : Codierung des Einsatzs  $n$
- $c_n$ : Kosten bei Wahl des Einsatzplans  $n$  pro eingesetztem Mitarbeiter

## ■ Entscheidungsvariable

- $x_n$ : Anzahl der eingesetzten Mitarbeiter in Einsatzplan  $n$



# Ganzzahliges Modell

- Zielfunktion

- $45x_1 + 45x_2 + 50x_3 + 80x_4 + 85x_5 \rightarrow \text{minimieren}$

- Nebenbedingung: Mitarbeiterbedarf

- $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 \geq 3$  "Periode 1"

- $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 \geq 5$  "Periode 2"

- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 \geq 7$  "Periode 3"

- Nicht-Negativität und Ganzzahligkeit

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

# Übungsaufgabe

- Stellen Sie das Ganzzahlige Lineare Optimierungsmodell für das folgende Einsatzplanungsproblem auf!

Periode	Uhrzeit	Bedarf
1	14.00 Uhr – 15.30 Uhr	3 Lehrkräfte
2	15.30 Uhr – 17.00 Uhr	4 Lehrkräfte
3	17.00 Uhr – 18.30 Uhr	2 Lehrkräfte

Periode	Uhrzeit	Einsatzplan						
		1	2	3	4	5	6	7
1	14.00 Uhr – 15.30 Uhr	•			•		•	•
2	15.30 Uhr – 17.00 Uhr		•		•	•		•
3	17.00 Uhr – 18.30 Uhr			•		•	•	•
Kosten		25 €	25 €	30 €	45 €	45 €	55 €	75 €



# Lösung der Übungsaufgabe

- Zielfunktion

- $25x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 45x_4 + 45x_5 + 55x_6 + 75x_7 \rightarrow \min$

- Nebenbedingungen

- $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 1x_7 \geq 3$

- $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 1x_7 \geq 4$

- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 1x_7 \geq 2$

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1, 2, \dots\}$

# ■ Lösung der Optimierungsmodelle

# Durchgängige Einsätze

- Spezialfall
- Lösung des vorherigen linearen Programms
  - mit Simplex-Algorithmus
  - implementiert beispielsweise in Excel
- Bei dieser Arbeit von Problem ist sichergestellt, dass immer alle Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt sind.
- Lösung im Beispiel:  $x^*=(0,0,5,3,2)$ 
  - 0 MA mit Einsatzplan 1 oder 2
  - 5 MA mit Einsatzplan 3 (nur nachmittags)
  - 3 MA mit Einsatzplan 4 (vormittags und nachmittags)
  - 2 MA mit Einsatzplan 5 (nachmittags und abends)
  - Kosten:  $0 \cdot 45 + 0 \cdot 45 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 80 + 2 \cdot 85 = 660,-$  EUR
  - eingeplante Mitarbeiter (Periode): 3(1), 5(2), 7(3)

# Generelle Einsätze

- Einsatz von Mitarbeitern in mehreren Perioden mit zwischenzeitlichen Unterbrechnungen möglich
- Beispiele (4 Perioden)
  - durchgängiger Einsatzplan: Einsatz in Periode 2,3 oder 1,2 oder 3,4
  - genereller Einsatzplan: Einsatz in Periode 1,3 oder 1,4 oder 2,4

# Branch-&-Bound-Verfahren

- i.A. liefert das Simplex-Verfahren keine gültige Lösung, da Ganzzahligkeitsbedingungen verletzt werden.
- Enumeration mit Branch-&-Bound-Verfahren notwendig.
- Bewertung jedes Teilproblems mit optimaler Lösung der zugehörigen LP-Relaxation.

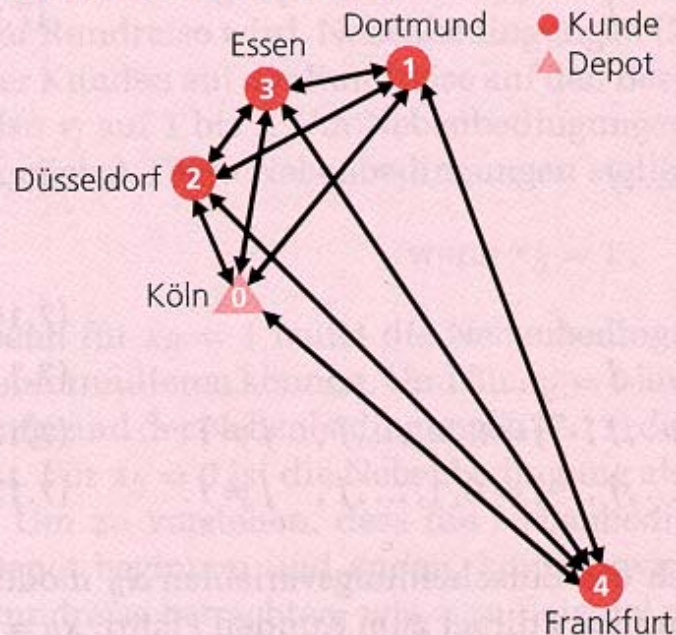
# ■ Tourenplanung

# Beispielszenario

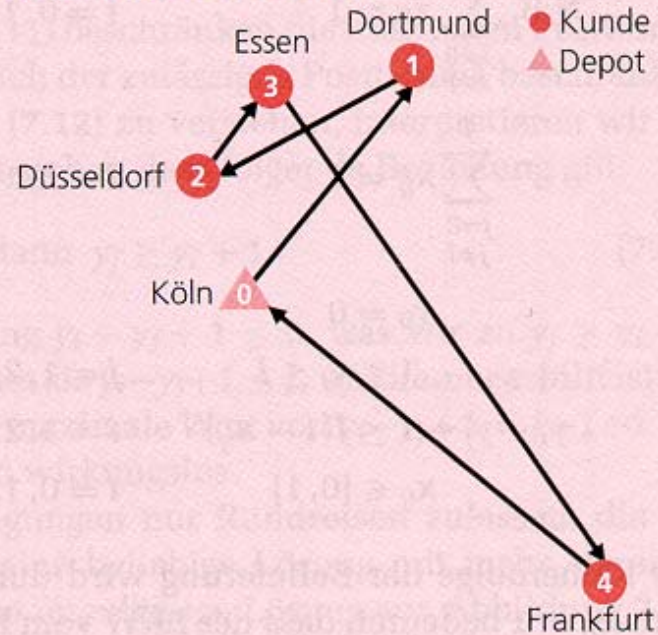
Abbildung 7.18

## Handlungsreisendenproblem des Chipproduzenten

### Mögliche Teilstrecken



### Zulässige Rundreise



# Zuordnungsproblem

- Es müssen Waren von einem zentralen Depot zu verschiedenen Kunden transportiert werden (Transportaufträge)
- Es stehen mehrere Fahrzeuge zur Verfügung
- Entscheidung 1
  - Zuordnung von Aufträgen zu Fahrzeugen



# Reihenfolgeproblem

- Tour für Fahrzeug  $i$ 
  - Menge aller Aufträge die Fahrzeug  $i$  zugeordnet sind
- Route für Fahrzeug  $i$ 
  - Reihenfolge, in der Fahrzeug  $i$  die ihm zugeordneten Aufträge abarbeitet
- Entscheidungsproblem 2:
  - Reihenfolge der Kundenbesuche festlegen.

# Simultane Entscheidungsprobleme

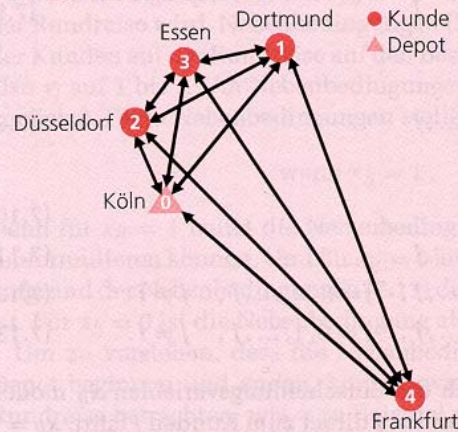
- Tourenplanungsprobleme sind kombinierte Entscheidungsprobleme
- Entscheidungsprobleme
  - Zuordnungs-Entscheidungen (Clustering)
  - Reihenfolge-Festlegungen (Routing bzw. Sequencing)
- beide Probleme
  - können hierarchisch gelöst werden (cluster first, route second)
  - sollten simultan gelöst werden

# Traveling Salesman Problem

Abbildung 7.18

## Handlungsreisendenproblem des Chipproduzenten

### Mögliche Teilstrecken



### Zulässige Rundreise

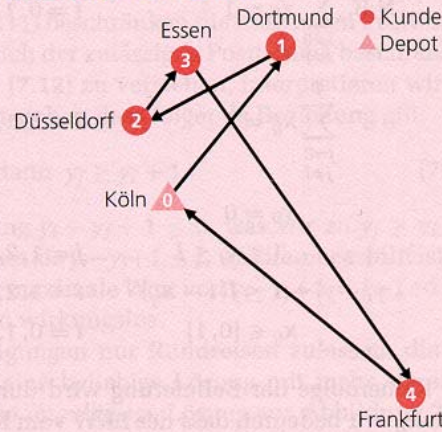


Tabelle 7.13

## Fahrtkosten bei vier Kunden

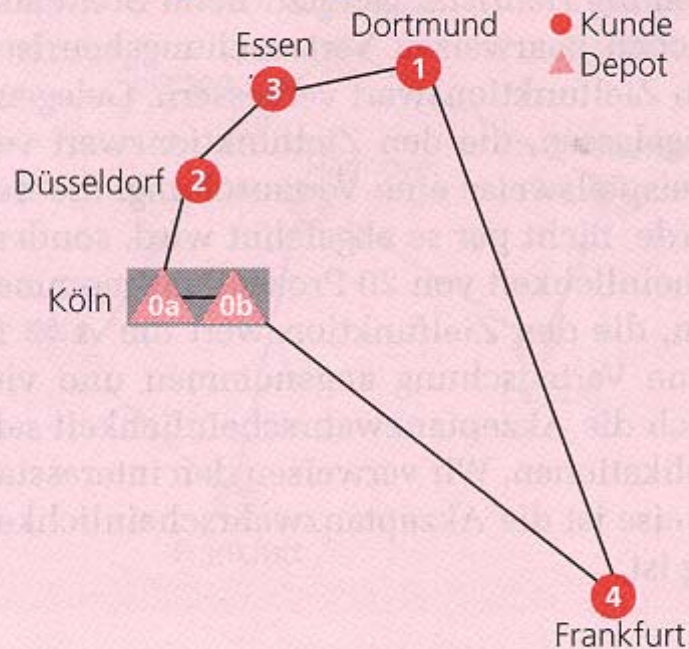
Von \ Nach	Köln	Dortmund	Düsseldorf	Essen	Frankfurt
Köln	–	92	40	72	191
Dortmund	92	–	68	36	222
Düsseldorf	40	68	–	36	228
Essen	72	36	36	–	254
Frankfurt	191	222	228	254	–

# Standardproblem der Tourenplanung

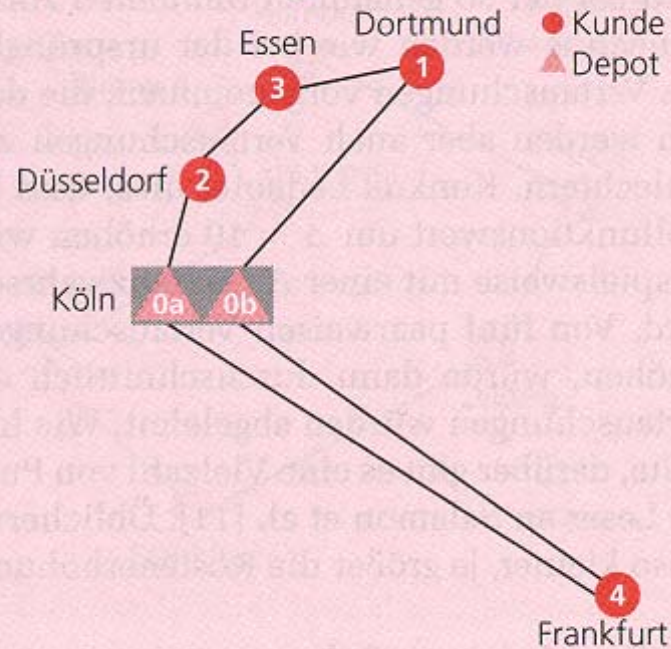
Abbildung 7.22

## Unzulässige und optimale Lösung mit zwei Fahrzeugen

### Unzulässige Lösung



### Optimale Lösung



# Paarweise Vertauschung

- Anwendung für Probleme mit einem Fahrzeug
- Algorithmus-Schritte
  - Berechne (irgend)eine Anfangslösung
  - Berechne Streckenersparnis nach paarweisem Vertauschen
  - Wähle das Tauschpaar mit größter Ersparnis
  - Wiederhole die beiden vorherigen Schritte, solange durch irgendeinen Tausch eine Streckenersparnis entsteht.
  - Stop des Verfahrens

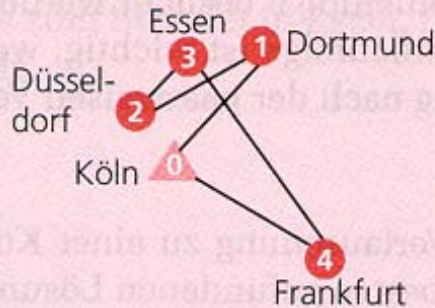


# Anwendung des Verfahrens

Abbildung 7.20

## Ausgangslösung und mögliche paarweise Vertauschungen

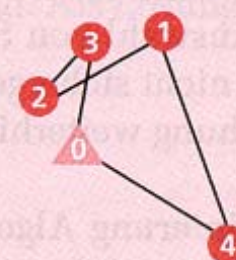
### Anfangslösung



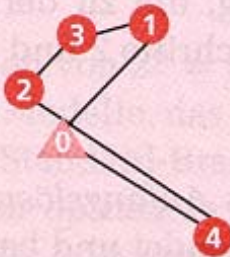
### Vertauschung 01 ↔ 23



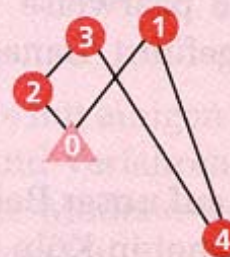
### Vertauschung 01 ↔ 34



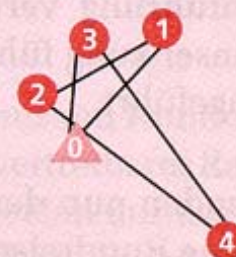
### Vertauschung 12 ↔ 34



### Vertauschung 12 ↔ 40

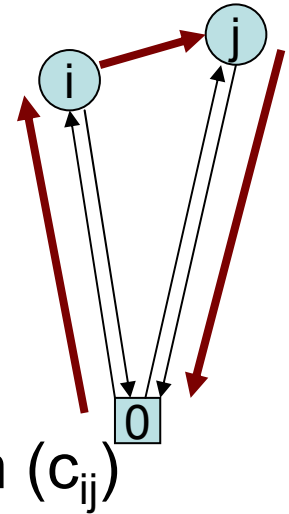


### Vertauschung 23 ↔ 40



# Savingsheuristik für das C-VRP

- Starte mit Pendeltouren: Depot  $\leftrightarrow$  Kunde
- Zusammenfassung von zwei Touren
  - spart eine Fahrt zum Depot ( $c_{i0}$ )
  - spart eine Fahrt zum zweiten Kundenort ( $c_{0j}$ )
  - verursacht Fahrtskosten zwischen Kundenorten ( $c_{ij}$ )
- Savings:  $s_{ij} := c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$
- Zusammenfassung von zwei Touren, wenn  $s_{ij} > 0$

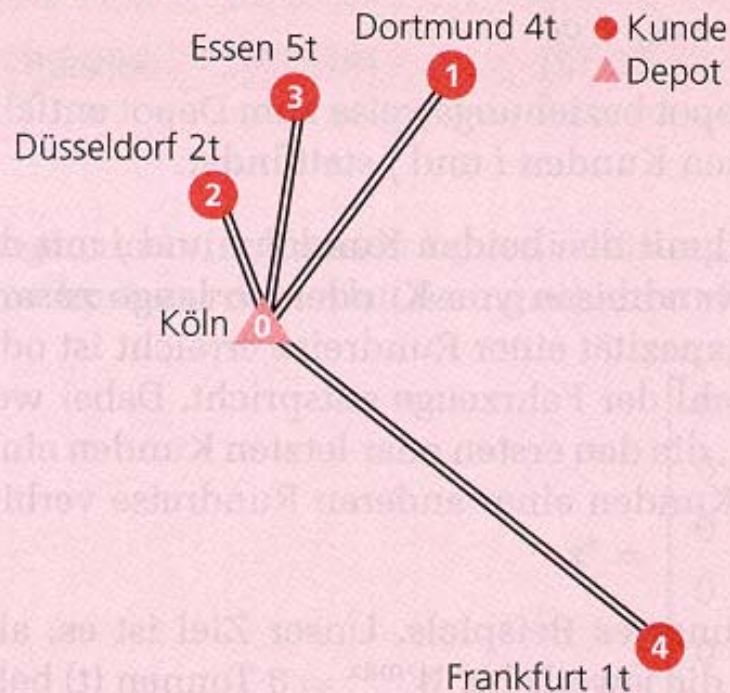


# Beispiel C-VRP

Abbildung 7.23

## Lösung Savingsheuristik

### Anfangslösung



### Lösung mit Kapazitätsbeschränkung





# Anwendung-Savingsverfahren

- Zwei Fahrzeuge mit je 8t Kapazität
- Startlösung
  - 4 Pendeltouren (aber nur zwei Fahrzeuge!)
  - Kosten:  $Z_0 = 2 \cdot (93\text{€} + 40\text{€} + 72\text{€} + 191\text{€}) = 790\text{€}$
- Savings
  - $\Delta_{12} = 92\text{€} + 40\text{€} - 68\text{€} = 64\text{€}$  Ersparnis (6t)
  - $\Delta_{13} = 92\text{€} + 72\text{€} - 36\text{€} = 128\text{€}$  Ersparnis (9t)
  - $\Delta_{14} = 92\text{€} + 191\text{€} - 222\text{€} = 61\text{€}$  Ersparnis (5t)
  - $\Delta_{23} = 40\text{€} + 72\text{€} - 36\text{€} = 76\text{€}$  Ersparnis (7t)
  - $\Delta_{24} = 40\text{€} + 191\text{€} - 228\text{€} = 3\text{€}$  Ersparnis (6t)
  - $\Delta_{34} = 72\text{€} + 191\text{€} - 254\text{€} = 9\text{€}$  Ersparnis (6t)
- Zusammenführung von Touren
  - Zusammenführung von 1 und 3: größte Ersparnis, aber unzulässig wegen Kapazität
  - Zusammenführung von 2 und 3 ergibt größtes Ersparnis bei Zulässigkeit
- Iteration
  - Wiederholung der Savings-Berechnung und der Zusammenführung bis zwei Touren erreicht sind.

# Zusammenfassung

- Mitarbeiterereinsatzplanung
  - Modellierung
  - Lösungsverfahren
- Tourenplanung
  - Optimierungsmodelle
  - Lösungsverfahren

# Klausurrelevante Abschnitte

- Kapitel 1
- Kapitel 2: 2.1 – 2.4, 2.6
- Kapitel 3: 3.1 – 3.4
- Kapitel 4: 4.1 – 4.5
- Kapitel 5: 5.1, 5.2, 5.6 sowie 5.7 (teilweise)
- Kapitel 6: 6.1 – 6.3, sowie 6.6 (teilweise)
- Kapitel 7

# Zur Übung

- Thonemann, S. 430, Aufgabe 6, 7
- Thonemann, S. 432, Aufgabe 9