Theoretische Informatik 2

Sabine Kuske
Linzer Str. 9a, OAS 3005
Tel.: 2335, 8794
kuske@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

7. April 2008

Polynomieller Platzbedarf

NPSPACE: Probleme mit nichtdeterministischen Lösungsalgorithmen, die polynomiellen Speicherplatz brauchen (im Verhältnis zur Größe der Eingabe)

PSPACE: Analog für deterministische Lösungen

Zusammenhänge zwischen Komplexitätsklassen

$$P \subseteq NP \subseteq_{(1)} NPSPACE =_{(2)} PSPACE$$

(1) Konstanter Speicherplatz pro Rechenschritt

(2) Backtracking

Offenes Problem: $NPSPACE \subseteq NP$

Chomsky-Grammatik (Typ 0)

$G = (N, T, P, S)$ mit

- N: endl. Menge nichtterminaler Zeichen,
- T: endl. Menge terminaler Zeichen mit $N \cap T = \emptyset$,
- $P \subseteq (N \cup T)^* N (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$: endliche Menge von Produktionen
- $S \in N$: Startsymbol

► Schreibweise für Produktionen $(u, v) \in P$: $u ::= v$

Direkte Ableitung

$$w = xuy \underset{p}{\longrightarrow} xvy = w'$$

mit $w, w', x, y, u, v \in (N \cup T)^*$, $p = (u ::= v)$.

1. Suche u als Teilwort eines Wortes
2. Ersetze u durch v

- Schreibweise: $w \underset{P}{\longrightarrow} w'$,
  falls P eine Menge von Produktionen ist mit $p \in P$.

Nullableitung

$$w \xrightarrow[P]{0} w$$

für alle $w \in (N \cup T)^*$.

Ableitung (Iteration direkter Ableitungen)

$$w_0 \xrightarrow[p_1]{} w_1 \xrightarrow[p_2]{} \cdots \xrightarrow[p_n]{} w_n$$

für $w_0, \ldots, w_n \in (N \cup T)^*$ und Produktionen $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$

Schreibweisen:

- $w_0 \xrightarrow[P]{} \cdots \xrightarrow[P]{} w_n$ oder $w_0 \xrightarrow[P]{n} w_n$ oder $w_0 \xrightarrow[P]{*} w_n$, falls $p_1, \ldots, p_n \in P$.

- $w \xrightarrow{*} w'$, falls P aus dem Kontext klar ist.

Erzeugte Sprache

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik.

Erzeugte Sprache

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \xrightarrow[P]{*} w\}$$

Chomsky-Hierarchie

Typ	Bezeichnung	Automaten
0	allgemein	Turing-Maschinen
1	monoton, kontext-sensitiv	linear beschränkte Automaten
2	kontextfrei	Kellerautomaten
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten

Wortprobleme

- Wortproblem von $L \subseteq T^*$: für alle $w \in T^*$ als Eingaben ist zu entscheiden, ob $w \in L$.
- Wortproblem $WP(G)$ einer Grammatik G ist Wortproblem von $L(G)$.
- $WP(G) \in O(n^3)$ für kontextfreie Grammatiken nach Cocke-Kasami-Younger.
- $WP(G) \in O(n)$, falls ein deterministischer Kellerautomat K existiert mit $L(G) = L(K)$.
- Insbes. $WP(G) \in O(n)$ für rechtslineares G wegen endlicher Automaten.

Typ	Bezeich.	Automaten	Wortproblem
0	allgemein	Turing-Maschinen	- (Reduktion Halteproblem auf WP)
1	kontext-sensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	$PSPACE = NPSPACE$
2	kontext-frei	Kellerautomaten	$O(n^3)$ (CKY)
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten	$O(n)$ (Det. endliche Automaten)

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist mit einem Zeitaufwand der Größenordnung $O(n^3)$ lösbar.

- Cocke-Kasami-Younger-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems kontextfreier Sprachen.
- Voraussetzung: Erzeugende Grammatik ist in Chomsky-Normalform.

Chomsky-Normalform (CNF)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform, falls für jede Regel $(A ::= r) \in P$ gilt:

$$r \in N^2 \text{ oder } r \in T$$

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G_{CNF} in Chomsky-Normalform, so dass

$$L(G) \setminus \{\lambda\} = L(G_{CNF}).$$

1.Schritt: Eliminierung von λ-Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt λ-Produktion.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' ohne λ-Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G') \setminus \{\lambda\}.$$