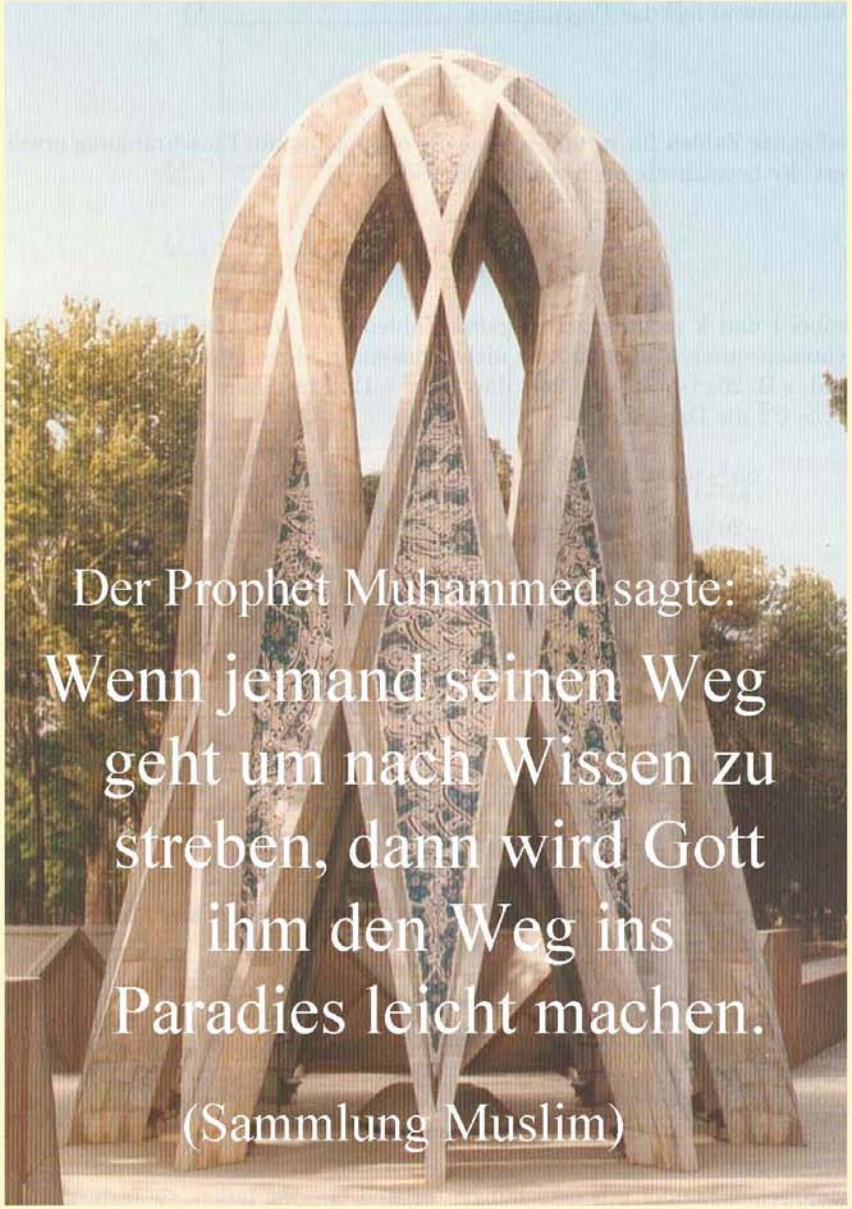
Algebra in den Ländern des Islam

Haus der Weisheit
(Bayt al-Hikma)



Historischer Überblick – Erste Kalifen

Kalif Umar (634-644) führt zur Machtdemonstration Bücherverbrennungen durch

635 Eroberung von Damaskus und Mesopotamien

635 Eroberung von Persien

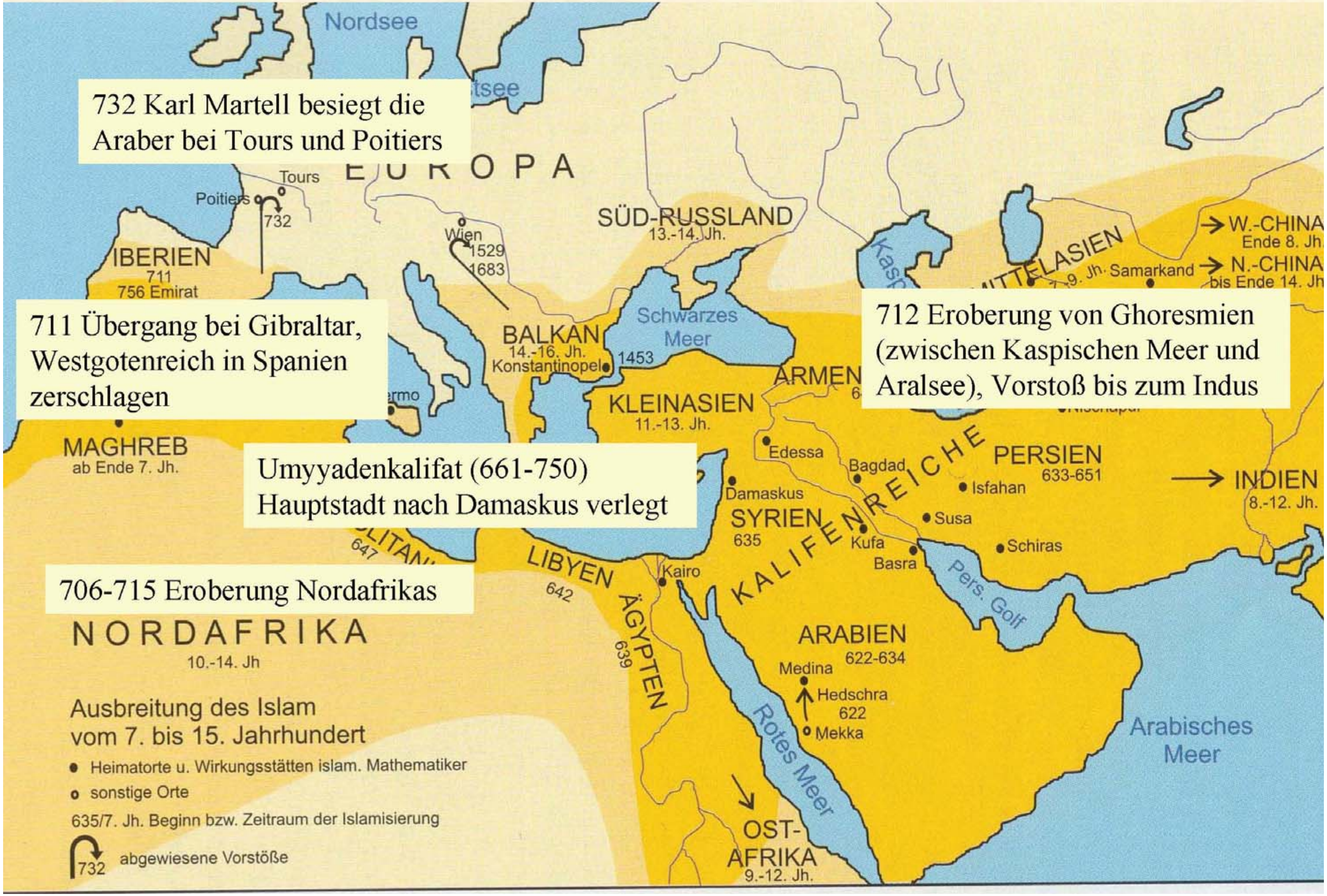
642 Eroberung von Ägypten

Abu Bakr (632-634), der Schwiegervater Muhammads vereint die arab. Stämme

622 Auswanderung (Hedschra) Muhammads von Mekka nach Medina (Beginn des arabischen Kalenders)

Erste Kalifen (632-661) mit Hauptstadt Medina

Historischer Überblick – Umayyaden



732 Karl Martell besiegt die Araber bei Tours und Poitiers

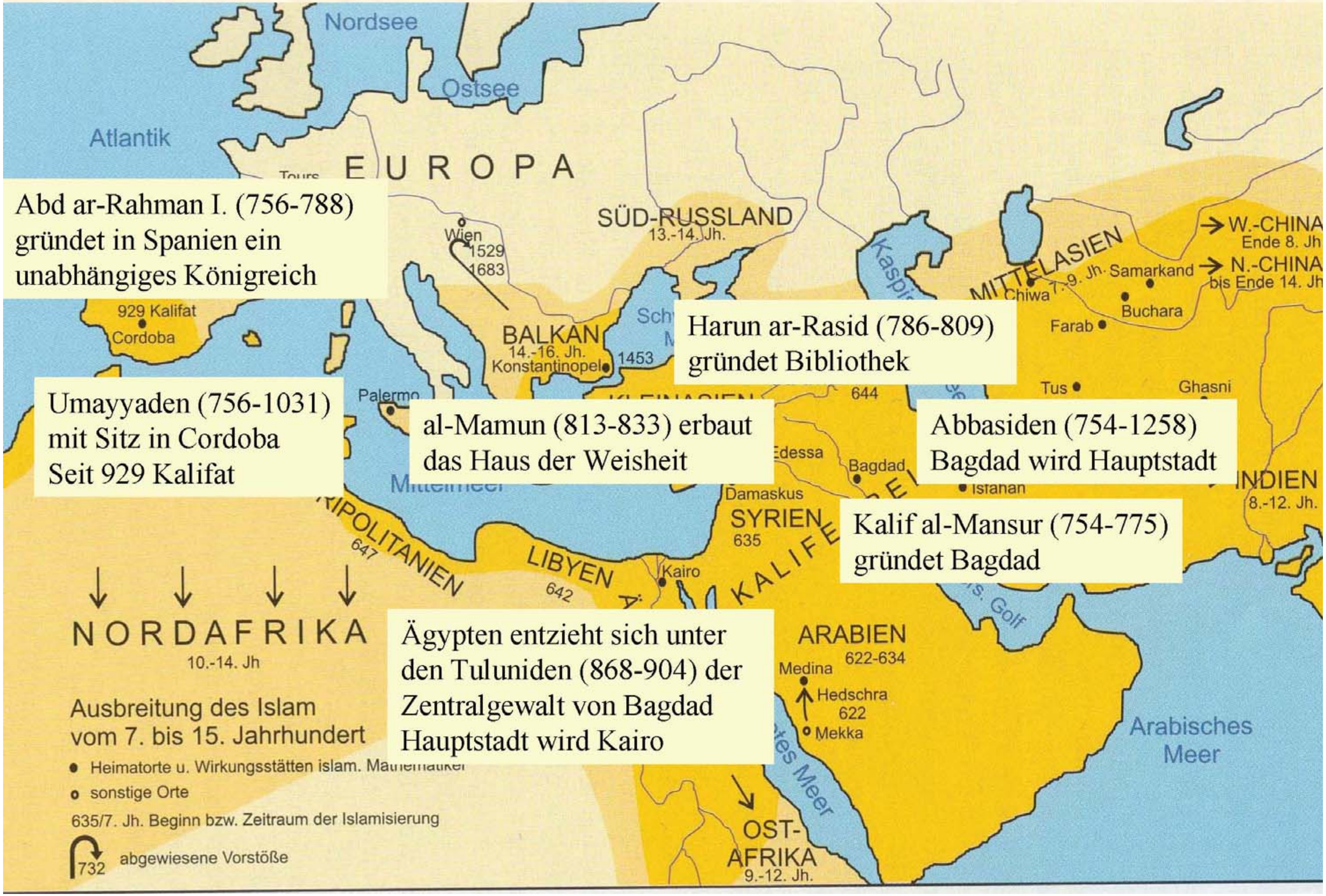
711 Übergang bei Gibraltar, Westgotenreich in Spanien zerschlagen

Umyyadenkalifat (661-750) Hauptstadt nach Damaskus verlegt

706-715 Eroberung Nordafrikas

712 Eroberung von Ghoresmien (zwischen Kaspischen Meer und Aralsee), Vorstoß bis zum Indus

Historischer Überblick – Abbasiden und Teilung



Abd ar-Rahman I. (756-788) gründet in Spanien ein unabhängiges Königreich

Umayyaden (756-1031) mit Sitz in Cordoba Seit 929 Kalifat

al-Mamun (813-833) erbaut das Haus der Weisheit

Harun ar-Rasid (786-809) gründet Bibliothek

Abbasiden (754-1258) Bagdad wird Hauptstadt

Kalif al-Mansur (754-775) gründet Bagdad

Ägypten entzieht sich unter den Tuluniden (868-904) der Zentralgewalt von Bagdad Hauptstadt wird Kairo

Mathematische Geschichte

8. Jh. Übernahme der indischen Ziffern

8.-10. Jh. Übersetzungen griechischer, persischer und indischer Werke (insbes. in Bagdad) – zuvor keine eigenständige mathematische Kultur

8.-9. Jh. Al-Khawarizmi

9.-10. Jh. Abu Kamil

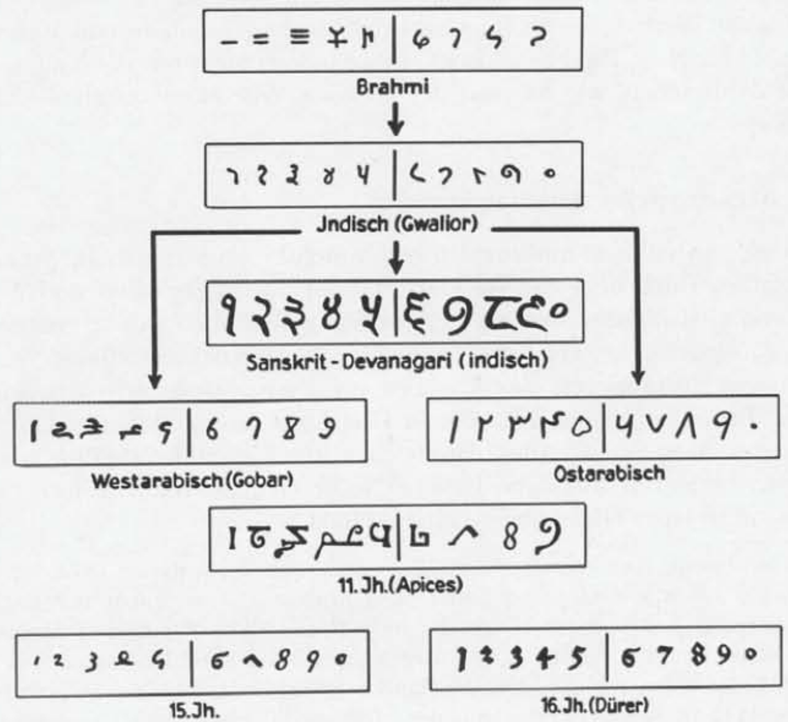
10.-11. Jh. Al-Karagi

11. Jh. Umar Hayyam

12.-13. Jh. Saraf ad-din at-Tusi

13. Jh. Nasir ad-din at-Tusi

15. Jh. Al-Kasi



Forschungsgebiete der Arabischen Mathematiker

- **Geometrie** : Thabit ibn Qurra – Omar al-Khayyam – Ibn al-Haytham.

- **Lehre von den Zahlen**
  1. **Indische Zahlen** : al-Uqludisi.
  2. **Wirtschaftsarithmetik** : Abu l-Wafa.
  3. **Algebra** : al-Khawarizmi
  4. **Dezimalzahlen**: al-Kashi
  5. **Kombinatorik** : Ibn al-Mun^{c}im

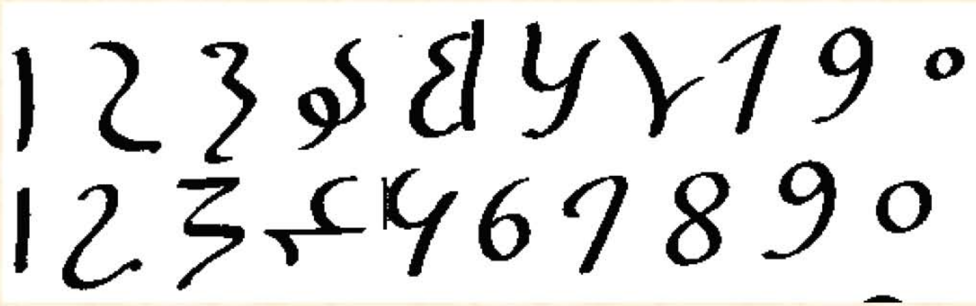
- **Trigonometrie** : Nasir ad-Dine at-Tusi
- **Astronomie** : al-Biruni
- **Musiklehre** : al-Farabi.

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al Khawarizmi

- Etwa 780 in Bagdad geboren und ca. 850 gestorben
- Mathematiker und Astronom
- wirkte im Haus der Weisheit
- schrieb mindestens fünf Werke über
  - Arithmetik,
  - Algebra,
  - Astronomie,
  - Geographie und
  - Kalenderrechnung

Die Wurzeln von Al-Khawarizmis Algebra

- Indische Mathematik
- Griechische Mathematik
- Babylonische Mathematik



Indische Zahlsystem

ط 9	ح 8	ز 7	و 6	ه 5	د 4	جـ 3	ب 2	أ 1	صفر 0
يط 19	يح 18	يز 17	يو 16	يه 15	يد 14	يجـ 13	يب 12	يا 11	ي 10
كط 29	كح 28	كز 27	كو 26	كه 25	كد 24	كجـ 23	كب 22	كا 21	ك 20
لط 39	لح 38	لز 37	لو 36	له 35	لد 34	لجـ 33	لب 32	لا 31	ل 30
مط 49	مح 48	مز 47	مو 46	مه 45	مد 44	مجـ 43	مب 42	ما 41	م 40
نط 59	نح 58	نز 57	نو 56	نه 55	ند 54	نجـ 53	نب 52	نا 51	ن 50

Al-Khawarizmis wichtigste Werke

Zwei seiner Werke nahmen großen Einfluss

das Werk über Arithmetik stellt die wichtigste Quelle für das Rechnen mit indischen Ziffern in Europa dar.

Die Bezeichnung „Algorismus“, sprachgeschichtlich abgeleitet von dem Namen al-Khawarizmi, entstand für das in seiner Schrift beschriebene Rechnen mit dem dezimalen Stellenwertsystem. Den gleichen Ursprung hat auch der Ausdruck „Algorithmus“.

„Ein **kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen**“ ist das erste eigenständige Werk über Algebra. Erstmals taucht hier im Titel das Wort al-gabr (das Ergänzen) auf, dass später für als Bezeichnung für den gesamten Stoffinhalt der Algebra wurde.

Algebra (= Ergänzen)

Der Name

Algebra

ist die lateinische Übersetzung des Wortes :

al-Jabr

Dieses Wort ist Teil des Titels des ersten Textbuches über Gleichungen und wie man sie löst:

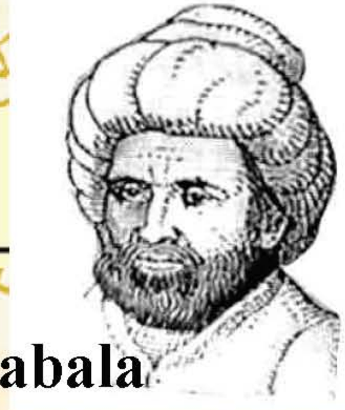
al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa-l-muqabala

geschrieben von

al-Khwarizmi (780-850).

Algorithmus ist die Transcription seines Namens

Al-Khawarizmis Algebra



al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa-l-muqabala

„Kurzes Buch über das Rechnen der Algebra und Almuqabala“ oder

„Ein kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“

Al-gabr (das Ergänzen, die Wiederherstellung, das Einrichten, das Restaurieren, das Ausüben von Zwang) bedeutet:
Addition gleicher Terme zu beiden Seiten einer Gleichung, um subtraktive Glieder zu eliminieren

Al-muqabala (das Ausgleichen, die Gegenüberstellung, das Opponieren) bedeutet:
Zusammenfassung jeder Gruppe von Gliedern gleicher Dimension in einer Gleichung zu einem Glied.

Beispiel:

Die Gleichung	$x^2 - 3x + 12 = 5x + 2$
wird durch al-gabr	$x^2 + 12 = 8x + 2$
und durch al-muqabala zu	$x^2 + 10 = 8x$

Al-Khawarizmis Algebra

***Al-gabr** (=Ergänzen) ist der Prozess negative Terme in einer Gleichung zu beseitigen*

$$50x^2 + 300 - 6x = 10x - 100 - x^2$$

Arabische Methode :

Vervollständige jede Seite durch Beseitigung der negativen Terme

$$50x^2 + 300 + x^2 + 100 = 10x + 6x$$

Indische Methode :

Subtrahiere von der rechten Seite der Gleichung die Unbekannten und von der linken Seite alle Zahlen, so dass alle Unbekannten auf der linken Seite und alle Zahlen auf der Rechten Seite sind.

$$50x^2 + 300 - 6x - 300 - 10x - (-x^2) = 10x -100 - x^2 - 300 - 10x - (-x^2)$$

Sechs Normalformen für Gleichungen

Al-Khawarizmi gibt sechs Normalformen an, auf die andere Gleichungen zurückgeführt werden. Er benutzt keine Symbolik, seine Ausführungen sind rein verbal.

Wurzel (arab. *gidr*) wird im Sinne von Unbekannte benutzt.

$ax2 = bx$

$ax2 = c$

$bx = c$

$ax2 + bx = c$

$ax2 + c = bx$

$x2 = bx + c$

a, b, c sind gegebene positive Zahlen

Indische kanonische Gleichung :

$$ax2 \pm bx = \pm c$$

a, b, c sind gegebene positive Zahlen oder Null.

***al-Jabr* :** $31x^2 - 2x + 40 = 21x$

then $31x^2 + 40 = 23x$

***al-Muqābala* :** $10x^2 + 3x + 4 = 15x^2 + 2x + 1$

then $x + 3 = 5x^2$

***Shay* :** « the thing » or the unknown. Today, it is denoted x

Māl* :** It is «the multiplication of ***Shay by ***Shay*** ». In fact it is the square of the unknown. Today it is denoted x^2 .

Equation $x + 3 = 5x^2$ is read in Arabic :

Shay plus drei gleich fünf Māl

Sechs Normalformen für Gleichungen

- ***Māl*** gleich ***Shay*** : $3x^2 = 5x$.
- ***Māl*** gleich Zahl : $8x^2 = 127$.
- ***Shay*** gleich Zahl : $89x = 4$.
- ***Māl*** und ***Shay*** gleich Zahl : $45x^2 + 12x = 5$.

5. ***Māl*** und Zahl gleich ***Shay*** : $3x^2 + 7 = 2x$.
6. ***Shay*** und Zahl gleich ***Māl*** : $100x + 2 = x^2$

Al-Khawarizmis Algebra

Wie die Regel angeben wird, sei hier an einer Gleichung vom Typ 5 gezeigt.
Zunächst wird durch a geteilt und man erhält in unserer Schreibweise $x^2 + q = p\,x$.

Al-Khawarizmis Beispiel ist $x^2 + 21 = 10\,x$.

"Halbiere die Wurzel; das gibt fünf;	$10/2 = 5$
multipliziere dies mit sich selbst, und du erhältst fünfundzwanzig;	$5^2 = 25$
Ziehe davon die einundzwanzig ab, die dem Quadrat hinzugefügt sind;	$25 - 21$
es verbleiben vier;	$= 4$
ziehe hieraus die Wurzel - das ergibt zwei,	Wurzel(4) = 2
ziehe dies von der Hälfte der Wurzel ab, d.h. von fünf, es verbleiben drei;	$5 - 2 = 3$
dies ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst,	$x = 3$
und das Quadrat ist neun.,	$x^2 = 9$
Falls du willst, addiere dies zur Hälfte der Wurzeln, das gibt sieben,	$5 + 2 = 7$
und das ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst,	$x = 7$
und das Quadrat ist neunundvierzig.".	$x^2 = 49$

Allgemein (in Formelschreibweise): $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Lösung einer quadratischen Gleichung

Māl und ***Shay*** gleich Zahl

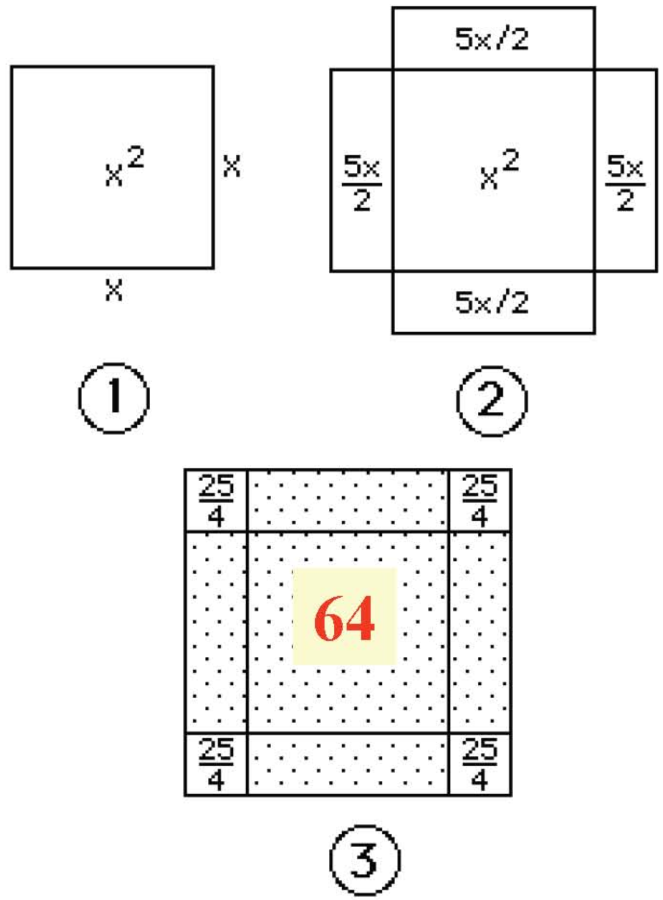
$$\mathbf{x^2 + px = q}$$

- Take half the roots , that is p/2 , half of p.
- Multiply it by itself, that is (p/2) x (p/2)
- Add to it the number, that is q
- Take the square roots of the result
- Subtract from it half the roots : It is what you are looking for

$$\frac{p}{2}\ \frac{p}{2} \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \longrightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \longrightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

$x^2 + 10x = 39$

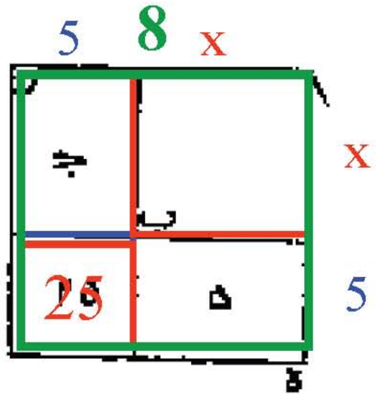
al-Khwarizmi completes the square



Al-Khawarizmis Algebra

Am Gleichungstyp 4 ($x^2 + px = q$) sei ein geometrischer Beweis von al-Khawarizmi kurz vorgestellt.

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$



اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح ان وهو
ضلع هن والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه
وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع
متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر
ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون
يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان
ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين على نقطة

$\downarrow + 25 \;=\downarrow + 25 = 64 = 8^2$

Beweis für $x^2 + 10x = 39$.

Der Beweis wird zwar an diesem Zahlenbeispiel geführt, die Argumentation ist jedoch allgemeingültig.

Al-Khawarizmi beginnt mit folgendem Quadrat.

Daran wird links und unten je ein Rechteck mit 5x angelegt.

So hat er $x^2 + 10x$ dargestellt. Um diese Figur zum Quadrat zu machen, muss ein Quadrat mit dem Inhalt 25 angefügt werden.

So erhält Al-Khawarizmi ein Quadrat der Seitenlänge

$x+5$

Der Zahl, die dem Quadrat und der Wurzel gleich ist, muss also ebenfalls 25 hinzugefügt werden.

Die Quadratseite hat somit die Länge 8.

Somit ergibt sich die gesuchte Lösung der Gleichung zu
$x = 8 – 5 = 3$

Al-Khawarizmis Algebra

Al-Khawarizmi widmet die zweite Hälfte seiner Algebra Testaments- und Erbteilungsaufgaben. Bei dem moslemischen Erbrecht kommen verwickelte Regeln des Religionsrechts zum tragen.

Beispielaufgabe:

Ein Mann stirbt. Er hinterlässt zwei Söhne und vermacht einem anderen Mann ein drittel seines Besitzes. Er besitzt 10 Dirham an Vermögen und ein Sohn schuldet ihm noch 10 Dirham.

Nach dem Aufteilungsprinzip müsste der Sohn zuerst seine 10 Dirham Schulden bezahlen und dann würde unter allen drei Erben geteilt.

Nach Islamischen Erbrecht gilt aber:

1. Der Betrag, um den das ausstehende Darlehen den gesetzlichen Anteil des Sohnes überschreitet, wird wie ein Geschenk für den Sohn behandelt.
2. Das Geschenk geht dem Nachlass voraus und der Nachlass geht den gesetzlichen Anteilen voraus.

Al-Khawarizmis Algebra

→ Al-Khawarizmi setzt x für den rechtmäßigen Nachlass des Sohnes.

Der mit Schulden belastete Sohn muss nur soviel in die Masse geben, wie sein Anteil bei der Teilung beträgt (also x).

→ aus der Schuld werden dem Vermögen x Dirham hinzugegeben

→ das gleichmäßig zu vererbende Vermögen beträgt also: $10+x$

Der Fremde erhält also folglich $(10+x)/3$ Dirham und beide Söhne je x Dirham

→ $(10+x)/3 + 2x = 10 + x$

→ $x = 5$

Der Sohn-Schuldner muss also zunächst 5 Dirham herausgeben, die er dann wieder erhält.

Sein Bruder erhält, wie auch der Fremde 5 Dirham aus dem Nachlass.

Abu Kamil

- lebte ca. 850-930
- entwickelt die Algebra in seinem Lehrbuch „Buch über Ergänzen und Ausgleichen“ weiter: erweiterte quadratische Gleichungen auf rationale oder irrationale Koeffizienten und Lösungen
- sein Werk „das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst“ behandelt lineare Gleichungen, sogenannte Vogelaufgaben
- Es wird angenommen, dass er in Ägypten geboren wurde, da er auch bekannt ist als al h’asib al-Mis’ri, der Rechner Ägyptens.

Abu Kamil – Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst

Einleitung

"Im Namen Gottes, des Barmherzigen und Gnädigen! Es spricht Shodja ben Aslam, bekannt unter dem Namen Abu Kamil: Ich kenne eine besondere Art der Rechnungen, die bei Vornehmen und Geringen, bei Gelehrten und Ungelehrten erzählt werden, an denen sie sich ergötzen und die sie neu und schön finden. Es frägt einer den anderen nach der Lösung, dann wird ihm mit einer ungenauen, nur vermutungsweisen Antwort erwidert. Sie erkennen darin weder ein Prinzip noch eine Regel. Es pflegten viele Vornehme und Geringe mich über Aufgaben der Rechenkunst zu fragen, dann antwortete ich ihnen für jede einzelne Aufgabe mit der einzigen Antwort, wenn es keine andere gab, aber oft gab es für eine Aufgabe zwei, drei, vier oder mehr Antworten. ... Da war meine Verwunderung hierüber groß, und ich machte die Erfahrung, dass ich, wenn ich von dieser Entdeckung erzählte, angestaunt oder unfähig erachtet wurde, oder dass diejenigen, die mich nicht kannten, einen falschen Verdacht gegen mich fassten. Da entschloss ich mich, über diese Rechnungsart ein Buch zu schreiben."

Arab algebra

Abu Kāmil (850 - 930 Egypt)

Kitab al-Kamil fil Jabr

(i) On the solution of quadratic equations,

(ii) On applications of algebra to the regular pentagon and decagon, and

(iii) On Diophantine equations and problems of recreational mathematics. The content of the work is the application of algebra to geometrical problems.

Methods in this book are a combination of the geometric methods developed by the Greeks together with the practical methods developed by al-Khwarizmi mixed with Babylonian methods.

Abu Kamil – Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst

Abu Kamils Werk befasst sich mit Vogelaufgaben. Es beinhaltet sechs Aufgaben, die sich im Schwierigkeitsgrad steigern. Sie verdeutlichen, dass eine Aufgabe entweder eine oder mehrere oder keine Lösung haben kann.

<u>Als Beispiel für Vogelaufgaben: Die erste Aufgabe von Abu Kamil:</u>

Für 100 Drachmen sollen 100 Vögel von drei Arten gekauft werden: Enten, Hühner und Sperlinge. Davon kostet eine Ente 5 Drachmen, ein Huhn 1 Drachme und je 20 Sperlinge kosten 1 Drachme. Wie viele Vögel jeder Art sind es?

Abu Kamil – Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst

Für 100 Drachmen sollen 100 Vögel von drei Arten gekauft werden: Enten, Hühner und Sperlinge. Davon kostet eine Ente 5 Drachmen, ein Huhn 1 Drachme und je 20 Sperlinge kosten 1 Drachme. Wie viele Vögel jeder Art sind es?

Die Anzahl der Enten sei x, die der Sperlinge y, also 100-x-y die Anzahl der Hühner, die hier mit z bezeichnet wird.

$$x + y + z = 100 \qquad (I)$$

$$5x + \frac{1}{20}y + z = 100 \qquad (II)$$

Abu Kamil eliminiert in den Gleichungen die letzte Unbekannte, hier z.

→ $100 - x - y = 100 - 5x - (1/20)y$

→ $x = \frac{19}{80}\,y$

x und y müssen für Natürliche Zahlen sein und für eine sinnvolle Lösung können nur 20, 40, 60 oder 80 Sperlinge gekauft werden (wenn man berücksichtigt, dass alle Variablen ungleich Null sein sollen).

→ Die Aufgabe hat nur eine Lösung: $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$

al-Karagi

- In der Nähe von Teheran geboren
- Zwischen 1019 und 1029 gestorben
- er schrieb ein Werk zur Arithmetik und zwei Werke zur Algebra
- Er trennte sich im Gegensatz zu seinen Vorgängern völlig von geometrischen Beweisen und entwickelte die Algebra zu einer eigenständigen Disziplin. Er definierte als Ziel der Algebra, die Bestimmung der unbekannten Größen durch die bekannten Größen. (Diese Definition blieb bis zum Anfang des 19. Jh. gültig)
- Diese Entwicklung wurde später von as-Samawal fortgesetzt.

- Er formulierte das Potenzgesetz (in unserer Schreibweise):

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

(m, n ganze Zahlen)

- Al-Karagi gab den geometrischen Beweis für die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Umar Hayyam (al-Chayyam, Umar ibn Ibrahim)

- Etwa 1048 in Nischabur geboren
- ca. 1131 verstorben
- Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter
- hatte die Leitung einer Astronomengruppe die den persischen Kalender reformierte
- **mit seiner geometrischen Theorie der Gleichungen dritten Grades begann eine neue Phase der Algebra**

Nasir ad-Din at-Tusi

- 1201 in Chorasan geboren
- Starb 1274 auf einer Reise nach Bagdad
- Gelehrter und Politiker
- Untersuchte die Anwendung des Sinussatzes für alle möglichen Fälle ebener Dreiecke
- Sein Werk “Sammlung zur Arithmetik mit Hilfe von Brett und Staub” enthält u.a. ein allgemeines Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln aus ganzen Zahlen (evtl. aus einem verlorengegangen Werk Umar Hayyams oder von chinesischen Astronomen)
- Mit ihm begannen wechselseitige Beziehungen von persischen und chinesischen Astronomen

An algebra textbook in 1387

Ibn al-Hā'im (1352 Cairo – 1412 Jerusalem)

Sharh al-Urjuza al-yasminiya fil Jabr

Introduction : Terminology

1. The six canonical equations : Definitions – solutions – numerical examples. (All proofs are algebraic with no geometrical arguments.)
2. The arithmetic of polynomials.
3. The arithmetic of irrationnels – Summing series of integers.
4. How to abord a problem and solve it.
5. Solutions of algebraic numerical problems : (1) with rational coefficients (2) with irrational coefficients.

al-Kasi (al-Kaschi, Giyat ad-Din Gamsid)

- geb. in Kaschan, gest. etwa 1429 in Samarkand
- Mathematiker und Astronom
- Sein Hauptwerk „Schlüssel zur Arithmetik“ ist eine Zusammenfassung der Leistungen und der Ergebnisse der damaligen Zeit, also ein Standardwerk
- Ebenso „Abhandlung über die Sehne und den Sinus“, das ein Iterationsverfahren zur Berechnung von sinus 1° enthält