<u>Fall 2:</u> $ggt(m, p) = d \neq 1 \Rightarrow$

$d \mid m$ und $d \mid p \Rightarrow d = p$

da p prim u. $d \neq 1$

$\Rightarrow p \mid m \Rightarrow m = 2p.$

$m^p - m = (2p)^p - 2p = x\,p$

$\Rightarrow m^p \equiv m \mod p$

für alle $m \in \mathbb{Z}$ $\square$

(iii) Sei $|G| = p$ prim.

$$\Rightarrow G = \langle g \rangle \, ?$$

Sei $e \neq g \in G \Rightarrow \langle g \rangle = G$

da $\langle g \rangle \leq_g G$ und

$$|\langle g \rangle| \;\big|\; |G| = p \qquad \square$$

(iv) $U \cap V \leq_g U$

$U \cap V \leq_g V$

Die Ordnung von $U \cap V$ ist sowohl ein Teiler von U als auch ein Teiler von V. Da $ggt(|U|, |V|) = 1$

$\Rightarrow |U \cap V| = 1 \Rightarrow U \cap V = \{e\}$ $\square$

3) <u>Endlich erzeugte abelsche Gruppen</u>

<u>Primzahlpotenz</u>: p^r mit p prim
u. $r \in \mathbb{N}$

Def. Eine Gruppe G heißt <u>p-Gruppe</u>
$\Leftrightarrow$ die Ordnung von G ist eine Primzahlpotenz

<u>Satz (Klassifikationssatz für endliche abelsche Gruppen)</u>

Jede endliche abelsche Gruppe G ist ein Produkt

$$\boxed{G \cong G_1 \times \cdots \times G_n}$$

von zyklischen Gruppen G_i, deren Ordnung eine Primzahlpotenz $p_i^{k_i}$ ist.
Dabei sind die Primzahlen p_i nicht notwendig verschieden.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht alle endlichen abelschen Gruppen bis auf Isomorphie bestimmen.

Abelsche Gruppen der Ordnung

2	3	4	5	6	7
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_7$
		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$			

8	9	10	11	12
$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$			$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$				