

Produkte in Kategorien

Sei $(A_i, i \in I)$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie \mathcal{C} .

Ein Objekt X zusammen mit einer Familie von Morphismen

$p_i: X \rightarrow A_i$ heißt **Produkt** der $(A_i, i \in I)$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Objekt Y und jeder Familie von Morphismen

$f_i: Y \rightarrow A_i$ existiert genau ein Morphismus $f^*: Y \rightarrow X$ mit

$$p_i \circ f^* = f_i$$

$\exists! f^*$

$\forall f_i$

Schreibweise:

$$X = \prod_{i \in I} A_i$$

Coprodukte in Kategorien

Sei $(A_i, i \in I)$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie \mathcal{C} .

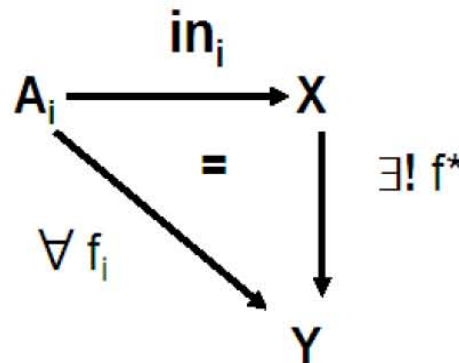
Ein Objekt X zusammen mit einer Familie von Morphismen $i_i : A_i \rightarrow X$ heißt **Coprodukt** der $(A_i, i \in I)$, wenn folgendes gilt:

$i_i : A_i \rightarrow X$ heißt **Coprodukt** der $(A_i, i \in I)$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Objekt Y und jeder Familie von Morphismen

$f_i : A_i \rightarrow Y$ existiert genau ein Morphismus $f^* : X \rightarrow Y$ mit

$$f^* \circ i_i = f_i$$



Schreibweise:

$$X = \coprod_{i \in I} A_i$$

$\text{Grp} = \text{Kategorie der Gruppen}$

Sei $(G_i; i \in I)$ Familie von Gruppen

$$\prod_{i \in I} G_i := \{ (g_i; i \in I); g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I \}$$

Produkt der $(G_i; i \in I)$.

Def. Coprodukt (direkte Summe) der G_i

$$\coprod_{i \in I} G_i = \bigoplus_{i \in I} G_i = \{ (g_i; i \in I) \in \prod_{i \in I} G_i; g_i \neq e_i \text{ nur für endl. viele } i \in I \}$$

Folgerung: Sei I endlich, dann gilt

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i$$

Abelsche Gruppen

Im folgenden betrachten wir abelsche Gruppen

Sei $G_i \leq G$; $i \in I$ eine Familie von Untergruppen einer abelschen Gruppe G

Def. G heißt (innerer) direkte Summe der $(G_i, i \in I)$ \Leftrightarrow def

$$\bigoplus_{i \in I} G_i \longrightarrow G$$

$$(g_i, i \in I) \longmapsto \sum_{\substack{i \in I \\ g_i \neq 0}} g_i$$

ist ein Isomorphismus

$$\text{Schreibweise } G = \bigoplus_{i \in I} G_i$$

Satz Sei $(G_i; i \in I)$ eine Familie von Untergruppen G_i der abelschen Gruppe G .
Dann sind äquivalent:

(i) G ist direkte Summe der G_i

(ii) $\forall g \in G \quad g = \sum_{i \in I} g_i$ eindeutig und
 $g_i \in G_i$ und $g_i \neq 0$ für endl. viele $i \in I$

(iii) G wird von $G_i, i \in I$ erzeugt und

$$\forall_{i \in I} \quad G_i \cap \sum_{j \neq i} G_j = \{0\}^*)$$

$$*) \sum_{i \in I} G_i := \left\{ \sum_{i \in I} g_i ; g_i \in G_i \text{ und } g_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

$$(iii) \Rightarrow (ii)$$

G wird von den $G_i; i \in I$ erzeugt, d.h.

$$\forall_{g \in G} \quad g = \sum_{i \in I} g_i \text{ u. } g_i \neq 0 \text{ nur für}$$

endl. viele $i \in I$

$$\text{Seien } g = \sum_{i \in I} g_i = \sum_{i \in I} g'_i$$

zwei verschiedene Darstellungen

$$\Rightarrow g_i - g'_i = \sum_{j \neq i} (g'_j - g_j) \xrightarrow{(iii)} g_i = g'_i$$

für alle $i \in I$

Beweis

(i) \Leftrightarrow (ii) nach Def. von $\bigoplus_{i \in I} G_i$

(ii) \Rightarrow (iii)

G wird von den Untergruppen G_i erzeugt
da jedes $g \in G$ nach (ii) eine
Darstellung der Form $g = \sum_{i \in I} g_i$

besitzt, wobei $g_i \in G_i$ u. $g_i \neq 0$ nur
für endlich viele $i \in I$.

$$x \in G_i \cap \sum_{j \neq i} G_j \Rightarrow x = 0$$

(sonst Widerspruch zur Eindeutigkeit
der Darstellung in (ii))

Korollar Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Dann

gilt

$$\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$$

Beweis

1) $\langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle \leq \mathbb{Z}_{nm}$ sind zyklische
Untergrp der Ordnungen m bzw n von \mathbb{Z}_{nm}

Bemerkung $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{nm}$

$$\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow x \in nm\mathbb{Z}$$

$$\alpha \langle n \rangle = \bar{0} \Leftrightarrow \langle \alpha n \rangle = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha n \in nm\mathbb{Z}$$

$$2) \langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{ \bar{0} \}$$

$$\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle \leq_q \langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle$$

Nun gilt (Satz von Lagrange)

Die Ordnung von $\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle$ teilt n als auch m

$$\Rightarrow |\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle| = 1 \quad (\text{ggT}(n, m) = 1)$$

$$\Rightarrow \langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{ \bar{0} \}$$

3) Satz von Bezout

$$\text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow 1 = h \cdot m + k \cdot n$$

$$\Rightarrow \forall \quad l = (lh) \cdot m + (lk) \cdot n$$

$$l \in \mathbb{Z} \quad \bar{l} = (lh) \bar{m} + (lk) \bar{n} \quad (\text{modular } nm)$$

Bemerkung $\mathbb{Z} \xrightarrow{\ell} \mathbb{Z}_{nm} = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$
 $\ell \xrightarrow{\quad} \bar{\ell} = \ell + nm\mathbb{Z}$
 ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\text{(z.B. } \overline{5m} = \overbrace{(m + \dots + m)}^{5 \text{ mal}} = 5\bar{m} \text{)}$$

Somit gilt

$\langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle$ bilden ein Erzeugendensystem
von \mathbb{Z}_{nm}

nach (ii) gilt $\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{ \bar{0} \}$

Satz

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{nm} = \langle \bar{n} \rangle \oplus \langle \bar{m} \rangle.$$

Da $\langle \bar{n} \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ u. $\langle \bar{m} \rangle \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad \square$$

Vorbemerkung Sei X Basis eines Vektorraumes V
 Dann gilt: Jede Abbildung $f: X \rightarrow W$ in einem
 Vektorraum W läßt sich auf $V \rightarrow W$
 eindeutig linear fortsetzen.

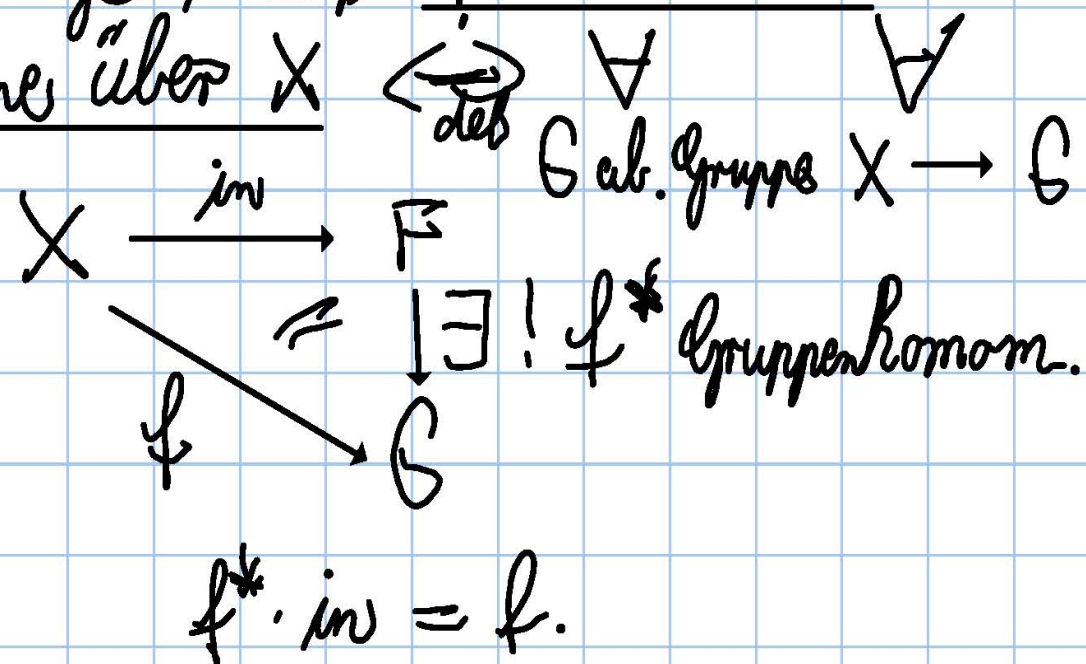
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & V \\ & \searrow f & \downarrow \text{=} \exists! \downarrow f^* \text{ linear} \\ & & W \end{array}$$

$$\forall x \in X \quad f^*(x) = f(x)$$

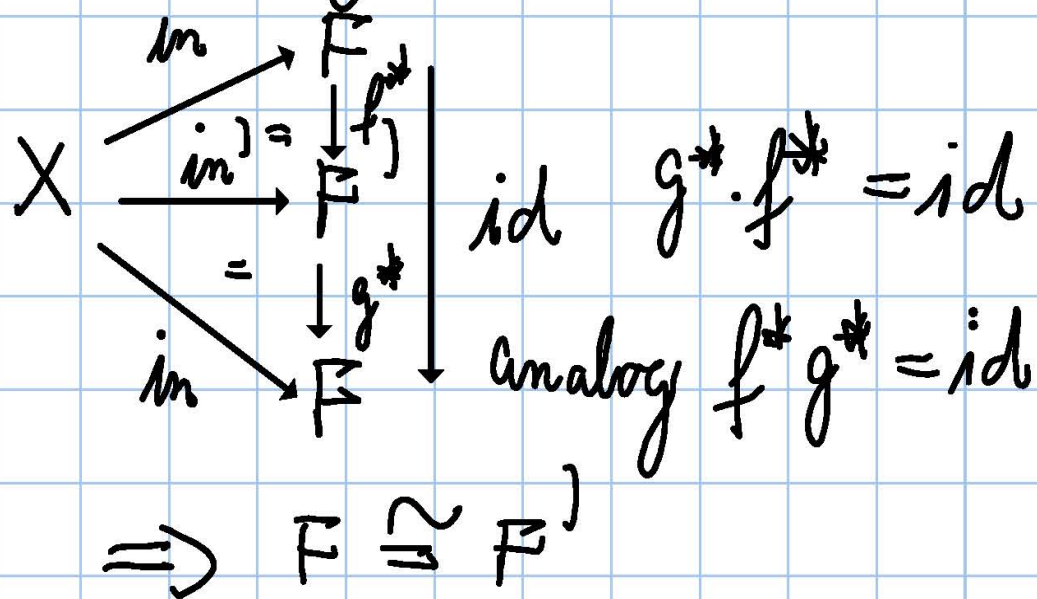
$$f^*\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Sprechweise: Jeder Vektorraum V ist frei
 über einer Basis $X \subseteq V$.

Def. Eine abelsche Gruppe F zusammen
 mit einer Abbildung $\text{in} : X \rightarrow F$
 (X Menge) heißt freie abelsche
Gruppe über X



Bemerkung F ist bis auf Isomorphie
eindeutig



Satz. Eine abelsche Gruppe F ist frei \Leftrightarrow
 F ist direkte Summe unendlicher
zyklischer Gruppen, d.h. es gibt eine
Teilmenge $X \subseteq F$ von Elementen unend-
licher Ordnung, so daß

$$F = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$$

X heißt eine Basis von F

Bemerkung

Sei $x \in F$ mit $\text{ord}(x) = \infty \Rightarrow$
alle Vielfachen $nx, n \in \mathbb{Z}$ sind verschieden
und es gilt $n \neq 0$ und $nx = 0 \Rightarrow x = 0$

Beweis

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{in}} & F = \bigoplus \langle x \rangle \\
 & \searrow f & \downarrow \begin{array}{l} x \in X \\ f^* \end{array} \\
 & & 0
 \end{array}$$

z.z. $\exists! f^*: F \rightarrow 0$ Gruppenhom.

$\forall x \in X \quad f^*(x) = f(x)$

$y \in F \Rightarrow y = \sum_{x \in X} \lambda_x x \quad (\text{eindeutig})$

$$f^*(y) = f^*\left(\sum_{x \in X} \lambda_x x\right) := \sum_{x \in X} \lambda_x f(x)$$

f^* ist Gruppenhomomorphismus und offensichtlich eindeutig.