Produkte in Kategorien

Sei $(A_i, i \in I)$ **eine Familie von Objekten in einer Kategorie C.**

Ein Objekt X zusammen mit einer Familie von Morphismen
p_i: X → A_i heißt **Produkt** der $(A_i, i \in I)$**, wenn folgendes gilt:**

Zu jedem Objekt Y und jeder Familie von Morphismen
$f_i : Y \to A_i$ existiert genau ein Morphismus $f^*: Y \to X$ mit

$$p_i^* f^* = f_i$$

$$\begin{tikzcd} A_i & X \arrow[l, "p_i"'] \\ & Y \arrow[ul, "\forall f_i"] \arrow[u, "\exists!\, f^*"'] \arrow[ul, phantom, shift left=4, "="] \end{tikzcd}$$

Schreibweise: $X = \prod_{i \in I} A_i$.

Coprodukte in Kategorien

Sei (A_i, $i \in I$) **eine Familie von Objekten in einer Kategorie C.**

Ein Objekt X zusammen mit einer Familie von Morphismen $_i$:

in_i A_i **→ X** heißt **Coprodukt** der (A_i, $i \in$**I), wenn folgendes gilt:**

Zu jedem Objekt Y und jeder Familie von Morphismen

$f_i : A_i \to Y$ existiert genau ein Morphismus $f^*: X \to Y$ mit

$f^* \, \mathbf{in}_i = f_i$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\mathbf{in}_i"] \arrow[dr, "\forall f_i"'] & X \arrow[d, "\exists! f^*"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Schreibweise: $X = \coprod_{i \in I} A_i$

$\mathcal{G}rp$ = Kategorie der Gruppen

Sei $(G_i ; i\in I)$ Familie von Gruppen

$$\prod_{i\in I} G_i := \{(g_i ; i\in I) ; g_i \in G_i \text{ für alle } i\in I\}$$

Produkt der $(G_i ; i\in I)$.

<u>Def. Koprodukt (direkte Summe) der $(G_i$</u>

$$\coprod_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in I} G_i = \{(g_i ; i\in I)\in \prod_{i\in I} G_i ; g_i \neq e_i \text{ nur für endl. viele } i\in I\}$$

Folgerung: Sei I endlich, dann gilt

$$\boxed{\bigoplus_{i\in I} G_i = \underset{i\in I}{\cdot}\, G_i}$$

Abelsche Gruppen

Im folgenden betrachten wir abelsche Gruppen

Sei $G_i \leq_g G$; $i \in I$ eine Familie von Untergruppen einer abelschen Gruppe G

Def. G heißt (innere) <u>direkte Summe</u> der $(G_i, i \in I)$ $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$

$$\bigoplus_{i \in I} G_i \longrightarrow G$$

$$(g_i; i \in I) \longmapsto \sum_{\substack{i \in I \\ g_i \neq 0}} g_i$$

ist ein Isomorphismus

Schreibweise $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$

Satz Sei $(G_i; i \in I)$ eine Familie von Untergruppen G_i der abelschen Gruppe G

Dann sind äquivalent:

(i) G ist direkte Summe der G_i

(ii) $\forall_{g \in G}\ g = \sum_{i \in I} g_i$ eindeutig und $g_i \in G_i$ und $g_i \neq 0$ für endl. viele $i \in I$

(iii) G wird von $G_i, i \in I$ erzeugt und

$$\forall_{i \in I}\ G_i \cap \sum_{j \neq i} G_j = \{0\}^{*)}$$

*) $\sum_{i \in I} G_i := \left\{ \sum_{i \in I} g_i \;;\; g_i \in G_i \text{ und } g_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$

$(iii) \Rightarrow (ii)$

G wird von den $G_i, i \in I$ erzeugt, d.h.

$\forall_{g \in G} \quad g = \sum_{i \in I} g_i$ u. $g_i \neq 0$ nur für endl. viele $i \in I$

Seien $g = \sum_{i \in I} g_i = \sum_{i \in I} g_i'$

zwei verschiedene Darstellungen

$\Rightarrow \quad g_i - g_i' = \sum_{j \neq i} (g_j' - g_j) \xRightarrow{(iii)} g_i = g_i'$ für alle $i \in I$ ∎

Beweis

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) nach Def. von $\bigoplus_{i\in I} G_i$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

G wird von den Untergruppen G_i erzeugt da jedes $g \in G$ nach (ii) eine Darstellung der Form $g = \sum_{i\in I}' g_i$ besitzt, wobei $g_i \in G_i$ u. $g_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$.

$$x \in G_i \cap \sum_{j\neq i}' G_j \Rightarrow x = 0$$

(sonst Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung in (ii))

Korollar Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Dann gilt $\boxed{\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}$

Beweis

1) $\langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle \leq_g \mathbb{Z}_{nm}$ sind zyklische Untergrp der Ordnungen m bzw n von $\mathbb{Z}_{nm}$

Bemerkung $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{nm}$

$$\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow x \in nm\mathbb{Z}$$

$$\alpha \langle n \rangle = \bar{0} \Leftrightarrow \langle \alpha n \rangle = \bar{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha n \in nm\mathbb{Z}$$

2) $\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle \leq_g \langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle$

Nun gilt (Satz von Lagrange)

Die Ordnung von $\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle$ teilt n als auch m

$\Rightarrow |\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle| = 1 \quad (ggt(n,m)=1)$

$\Rightarrow \langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{\bar{0}\}$

3) Satz von Bezout

$ggt(n,m)=1 \Rightarrow 1 = hm + kn$

$$\Rightarrow \forall_{l \in \mathbb{Z}} \quad l = (lh)m + (lk)n$$

$$\bar{l} = (lh)\bar{m} + (lk)\bar{n}$$

(modulo nm)

Bemerkung
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\ \varrho\ } \mathbb{Z}_{nm} = \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \\ \ell &\longrightarrow \bar{\ell} = \ell + nm\mathbb{Z} \end{aligned}$$
ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\left(\text{z.B. } \overline{5m} = \overline{(\underbrace{m + \cdots + m}_{5 \text{ mal}})} = 5\,\overline{m} \right)$$

Somit gilt

$\langle \bar{n} \rangle, \langle \bar{m} \rangle$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}_{nm}$

nach (ii) gilt $\langle \bar{n} \rangle \cap \langle \bar{m} \rangle = \{\bar{0}\}$

Satz $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_{nm} = \langle \bar{n} \rangle \oplus \langle \bar{m} \rangle$.

Da $\langle \bar{n} \rangle \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ u. $\langle \bar{m} \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\square$

<u>Vorbemerkung</u> Sei X Basis eines Vektorraumes V

Dann gilt: Jede Abbildung $f: X \longrightarrow W$ in einen Vektorraum W läßt sich auf $V \longrightarrow W$ eindeutig linear fortsetzen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, "\exists! \, f^* \text{ linear}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & W \end{tikzcd}$$

$$\forall_{x \in X} \quad f^*(x) = f(x)$$

$$\boxed{f^*\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) := \sum_i \lambda_i f(x_i)}$$

Sprechweise: Jeder Vektorraum V ist frei über einer Basis $X \subseteq V$.

Def. Eine abelsche Gruppe F zusammen mit einer Abbildung $in\ X \longrightarrow F$ (X Menge) heißt <u>freie abelsche Gruppe über X</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ G ab. Gruppe $\forall$ $X \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "in"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\exists !\, f^* \text{ Gruppenhomom.}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$f^* \cdot in = f.$

Bemerkung F ist bis auf Isomorphie eindeutig

$$
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, "f^*"] \arrow[dd, bend left=60, "id"] \\
X \arrow[ur, "in"] \arrow[r, "in'"] \arrow[dr, "in"'] & F' \arrow[d, "g^*"] \\
 & F
\end{tikzcd}
$$

$g^* \cdot f^* = id$

analog $f^* g^* = id$

$\Rightarrow F \cong F'$

Satz. Eine abelsche Gruppe F ist frei $\Leftrightarrow$ F ist direkte Summe unendlicher zyklischer Gruppen, d.h. es gibt eine Teilmenge $X \subseteq F$ von Elementen unendlicher Ordnung, so daß

$$\boxed{F = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle}$$

X heißt eine <u>Basis von F</u>

Bemerkung

Sei $x \in F$ mit $\mathrm{ord}(x) = \infty \Rightarrow$
alle Vielfachen nx, $n \in \mathbb{Z}$ sind verschieden
und es gilt $n \neq 0$ und $nx = 0 \Rightarrow x = 0$

Beweis

$\Leftarrow$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "in"] \arrow[dr, "f"'] & F = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle \arrow[d, "\exists!\, f^*"] \\ & G \end{tikzcd}$$

z.z. $\exists!\, f^* : F \longrightarrow G$ Gruppenhom.

$$\forall_{x \in X} \quad f^*(x) = f(x)$$

$$y \in F \Rightarrow y = \sum_{x \in X} \lambda_x x \quad (\text{eindeutig})$$

$$f^*(y) = f^*\Big(\sum_{x \in X} \lambda_x x\Big) := \sum_{x \in X} \lambda_x f(x)$$

f^* ist Gruppenhomomorphismus und offensichtlich eindeutig.