Satz Eine endl. erzeugb. torsionsfreie abelsche Gruppe ist frei.

Satz Eine endl. erzeugb. abelsche Grp ist direkte Summe einer freien abelschen Grp mit endl. Rang und einer endlichen Grp.

Beweis. Sei $T(G) \leq_g G$ Torsionsuntergrp.

$\Rightarrow$ $G/T(G)$ torsionsfrei, endl. erzeugt

$\Rightarrow$ $G/T(G)$ frei, endl. erzeugt

$\Rightarrow$ $G/T(G) \cong \mathbb{Z}^r$;

da gilt: Ist $U \leq_g G$ eine Untergruppe u. G/U frei, dann gilt: $G = U \oplus V$, $V \cong G/U$

$$\Rightarrow \quad G = T(G) \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{frei}}}{V} \quad \cong G/T(G)$$

$\Rightarrow$ $T(G)$ ist endl. erzeugt

(als Untergrp einer endl. erz. abelschen Grp)

$$\Rightarrow T(G) = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle g_i \rangle,$$

da $\langle g_i \rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (endlich)

$\Rightarrow$ $T(G)$ endlich. $\square$

Satz Sei p Primzahl u. G endl. abelsche p-Gruppe der Ordnung p^n.

Dann gibt es ganze Zahlen

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \nu_k > 0 \text{ mit}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i = n \quad (\text{d.h. } p^n)$$

und zykl. Gruppen $H_i \leq_g G$

mit $|H_i| = p^{\nu_i}$ $i = 1, \dots, k$,

so dass $\boxed{G = H_1 \oplus \dots \oplus H_k}$

Beweis Sei $g \in G$ ein Element mit max. Ordnung, so gilt

$$G = \langle g \rangle \oplus V$$

für eine abelsche p-Gruppe und es gilt $|V| < |G|$

Sei $H_1 := \langle g \rangle$ $|H_1| = p^{\nu_1}$.

durch vollständige Induktion $\Rightarrow$ $\boxed{G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_k}$ $\square$

<u>Satz</u> Sei G endl. erzeugte abelsche Grp
Dann gibt es Primzahlpotenzen
$q_1, \dots, q_t$ und $r \in \mathbb{N}_0$
mit $\boxed{G \cong \mathbb{Z}_{q_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_t} \times \mathbb{Z}^r}$

<u>Beweis</u> Da $G = T(G) \oplus \mathbb{Z}^r$, $r \in \mathbb{N}_0$ u.
die endl. abelsche $T(G)$
direkte Summe der p-primären Komp.
$$T(G) = \bigoplus_{p \text{ Primz.}} T(G)_p$$ und
$T(G)_p$ eine p-Gruppe sind $\Rightarrow$ Satz

Gruppen operieren auf Mengen

Def. Grp G operiert auf einer Menge $X \neq \emptyset$, wenn es eine Abbildung gibt
$$G \times X \longrightarrow X \text{ mit}$$

$$O1) \quad (gh)x = g(hx)$$
$$O2) \quad ex = x$$

Bem. G operiert auf $X \iff$
Es ex. Gruppenhom. $L : G \longrightarrow S(X)$
def. $L : G \longrightarrow S(X)$
Sei $g \in G : L(g) : X \longrightarrow X$
$$L(g)(x) := gx \text{ für } x \in X$$

G operiere auf X ($\equiv X$ ist eine G-Menge), dann erhalten wir eine Äquivalenzr. auf X

$$x, x' \in X \quad x \underset{G}{\sim} x' \iff \exists_{g \in G} \; gx = x'$$

(i) Refl. $\quad x \underset{G}{\sim} x$ da $ex = x$ (O2)

(ii) Sym. $\quad x \underset{G}{\sim} y \Rightarrow y \underset{G}{\sim} x$ *

(iii) Trans. analog.

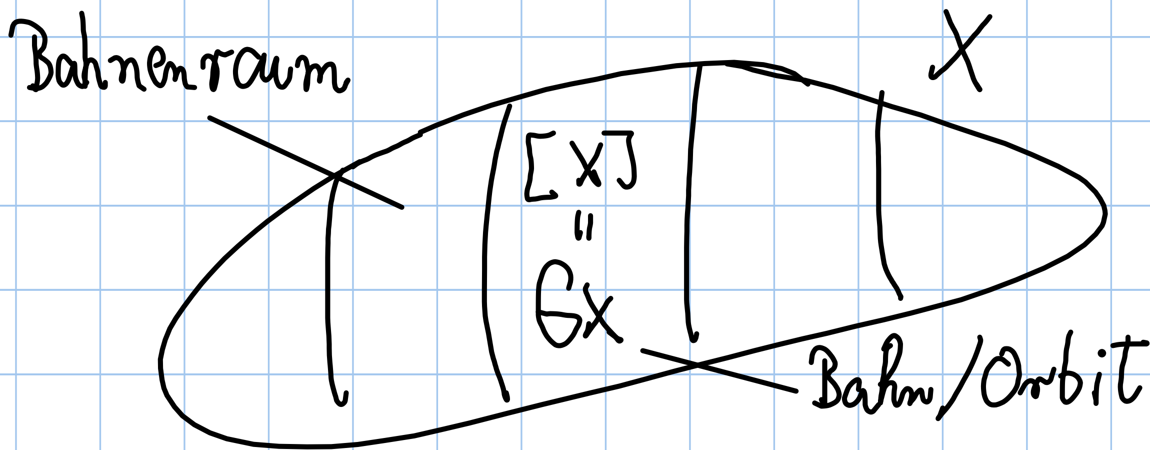
$$* \quad \exists_{g \in G} \; gx = y \Rightarrow g^{-1}y = g^{-1}(gx)$$
$$= (g^{-1}g)x = ex = x$$

$$[x] := \{ y \in X ; \underbrace{\exists g \in G \;\; gx = y}_{y \underset{G}{\sim} x} \} = Gx$$

mit $Gx := \{ gx ; g \in G \}$ heißt

Bahn oder Orbit der G-Menge X

und $G \backslash X := \{ [x] ; x \in X \}$ **Bahnenraum**



Def. Sei X eine G-Menge

Stabilisator von $x \in X$ ist die

Menge $G_x := \{ g \in G ; gx = x \}$

G_x Untergrp von G

Satz Sei X eine G-Menge u. $x \in X$

Dann gilt

$$\boxed{G/G_x \cong Gx}$$

Nebenklassen des Stabilisators

Orbit von x

Beweis Sei $f: G \longrightarrow Gx$, $f(g) := gx$

$$\left.\begin{aligned} & g' \sim g \iff f(g') = f(g) \\ & \iff g'x = gx \iff \\ & g^{-1}g'x = x \iff g' \in gG_x \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f", "\text{surj}"'] \arrow[d] & Gx \\ G/G_x \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{G/G_x \cong Gx}$$ (Homomorphiesatz)

Korollar (Bahnformel)

Sei G endl. Grp u. X eine G-Menge

$$\Rightarrow \forall_{x \in X} \boxed{|G| = |Gx|\,|G_x|}$$

Beweis: $G_x \leq_g G$ (G endlich)

Lagrange $\Longrightarrow$ $|G| = |G/G_x| \, |G_x|$.

Da $G/G_x \cong Gx$ $\Longrightarrow$

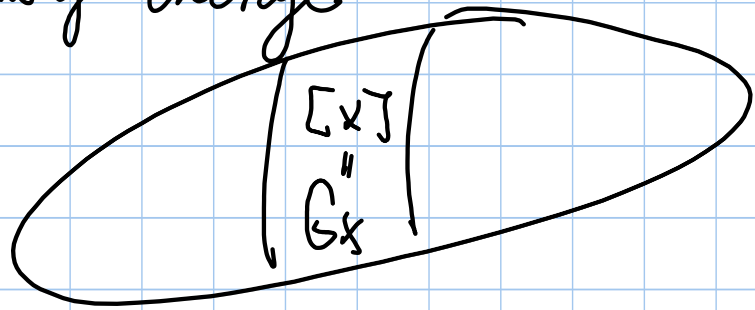
$$|G| = |Gx| \, |G_x| \quad \square$$

Beispiel: "Jede Gruppe operiert auf sich"

Sei G Grp.: $G \times G \longrightarrow G$

$(g, x) \longmapsto gx$

Sei X eine G-Menge



Def. Ein <u>Vertretersystem einer G-Menge X</u> ist eine Untermenge $V \subseteq X$ mit

a) $\forall_{x \in X} \ \exists_{v \in V} \ Gx = Gv$

b) $a, b \in V;\ a \neq b \Rightarrow Ga \cap Gb = \emptyset$

d.h. aus jeder Äquivalenzklasse wird genau ein Element (beliebig) ausgewählt.

Länge von $Gx := |Gx|$

Es gilt $|Gx| = 1$ d.h. $\forall_{g \in G} \ gx = x$

Ist $|Gx| = 1$ dann heißt x Fixpkt bzgl. G

$Fix_G(X) \equiv$ Menge aller Fixpkt

<u>Satz</u> X endl. G-Menge und V ein Vertretersystem. Dann gilt

$$\boxed{|X| = |Fix_G(X)| + \sum_{\substack{a \in V \\ |G/G_a| > 1}}^{!} |G/G_a|}$$

<u>Beweis</u>: Da $X = \bigcup_{a \in V} Ga \Rightarrow |X| = \sum_{a \in V}^{!} |Ga|$

$(\{Ga ; a \in V\}$ Partition auf $X!)$.

Da $G/G_a \cong Ga \Rightarrow$ Satz $\square$