Mathematik 1 für Informatiker

Grundbegriffe

Einführung in die Logik u. Algebra

03.11.2006

M. B. Wischnewsky

Schreibw. $R \subseteq A \times B := \{(a,b);\ a \in A \text{ u. } b \in B\}$

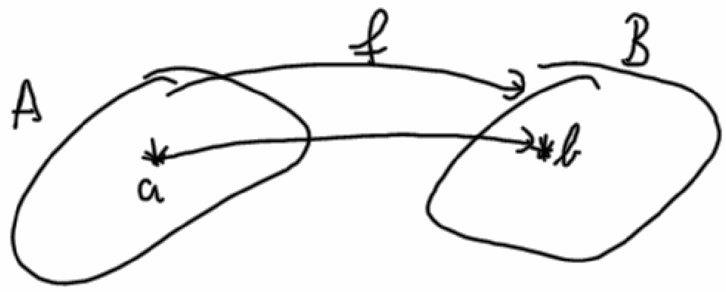
$$\boxed{(a,b) \in R \iff a \longrightarrow b}$$

<u>Def.</u> R <u>rechtseindeutig</u> $\iff \underset{a \in A}{\forall}\ (a,b_1),(a,b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2$

Eine rechtseindeutige Relation heißt <u>Funktion</u>

Sei $f \subseteq A \times B$ eine rechtseindeutige Funktion.

<u>Schreibweise.</u>
$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow b = f(a) \quad (\text{für } (a,b) \in f.) \end{aligned}$$



Def.: $G := (E,K)$ heißt **(gerichteter) Graph** $\Leftrightarrow$

- E ist eine endliche, nicht leere Menge. Die Elemente von E heißen **Ecken oder Knoten**,
- $K \subseteq E \times E$ ist eine Relation auf E und heißt Kantenmenge. Die Elemente von K heißen **Kanten**.
- Eine Kante $(u,v) \in$ **K** führt von Ecke u zu Ecke v

  Schreibweise: $u \rightarrow v$

Anmerkung: Eine binäre Relation K auf einer endlichen, nichtleeren Menge E kann durch einen Graphen veranschaulicht werden in dem jedes Tupel (a,b) als Kante zwischen den Knoten a und b interpretiert wird.

$$(a,b) \in K \quad \Longleftrightarrow \quad a \longrightarrow b$$

Umgekehrt entspricht jede Kante (a,b) eines Graphen die zwei Knoten a und b verbindet einer Relation K für die aKb als „a ist mit b direkt verbunden" interpretiert werden kann.

Äquivalenzrelationen

Definition:

Eine **Äquivalenzrelation** **auf einer Menge M ist eine binäre Relation ~ auf M, die**

- **reflexiv,** $\forall_{x \in M}\ x \sim x$
- **symmetrisch und** $\forall_{x,y \in M}\ x \sim y \Rightarrow y \sim x$
-
- **transitiv ist.** $\forall_{x,y,z \in M}\ x \sim y \text{ und } y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Definition **Äquivalenzklasse**

Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf M und a ∈M. Dann heißt die Menge der zu a äquivalenten Elemente die Äquivalenzklasse von a.

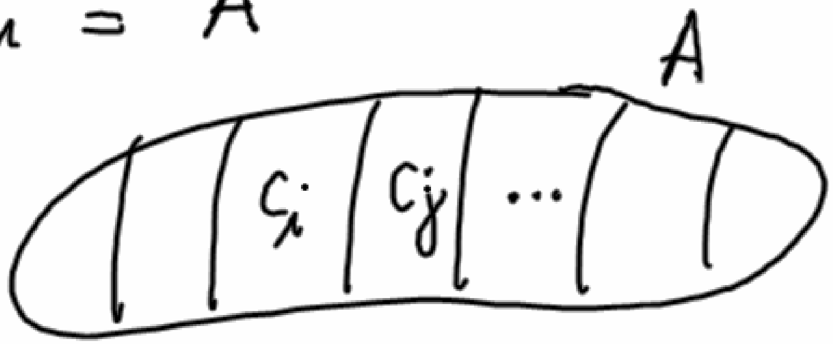
$$[a] := \{x \in M \mid a \sim x\} \subseteq M$$

Def $\mathbb{P}(A) = \{ C_i \subseteq A ;\ i \in I \}$ heißt Partition oder Zerlegung auf A $:\Longleftrightarrow$

1) $\forall_{i \in I} \ C_i \neq \emptyset$

2) $\forall_{i,j \in I} \ C_i \cap C_j \neq \emptyset \Rightarrow C_i = C_j$

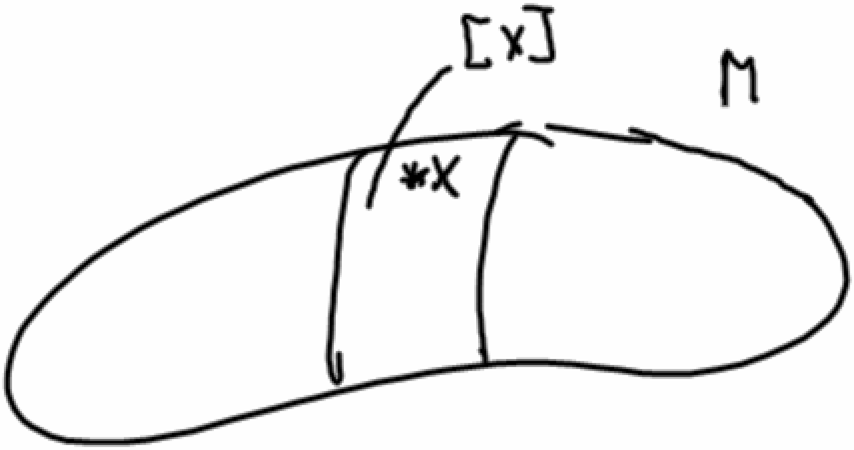
3) $\bigcup_{i \in I} C_i = A$



<u>Satz</u> Sei $\sim$ eine Äquivalenzrel. auf der Menge M. Dann definiert die Menge aller Äquivalenzklassen

$$[x] = \{ y \in M ; x \sim y \}, \quad x \in M$$

eine Partition auf M.



<u>Def.</u> Sei $\mathbb{P}(M) = \{ C_i ; i \in I \}$ eine Partition auf M

Für $x, y \in M$ wird eine Relation wie folgt definiert

$$x \sim y \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \underset{i \in I}{\exists} \; x, y \in C_i$$

<u>Satz</u> Bezeichnung wie oben

1) $\sim$ ist eine Äquivalenzrel. auf M.

2) $$M/_{\sim} := \{ [x] ; x \in M \} = \mathbb{P}(M)$$

$$[x] = \{ y \in M ; x \sim y \} \subseteq M$$

$M/\sim$ heißt <u>Quotientenraum</u> bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$.

Äquivalenzrelationen

Funktionen

Sei f: $A \rightarrow B$ eine Funktion, dann definiert

$$a \sim a' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$$

eine Äquivalenzrelation auf A

A/~ := Die Menge der Äquivalenzklassen von ~ heißt der Quotientenraum von A bzgl. ~

$$A/\sim \; := \{[a];\, a \in A\}$$

Relationen und Funktionen

Man nennt eine Abbildung f: A → B

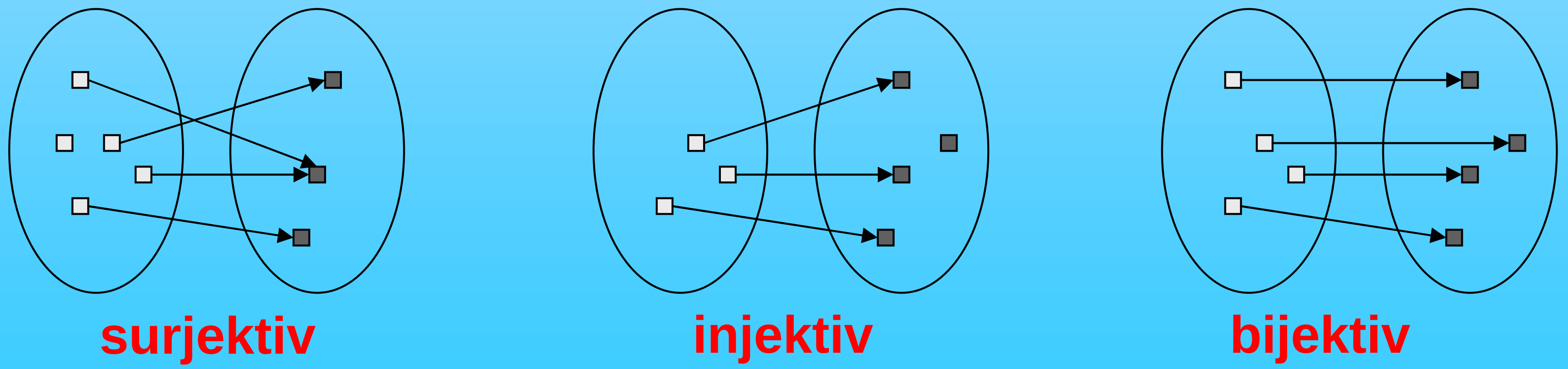
- **surjektiv**, wenn es für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit

  $f(x)=y$.

- **injektiv** wenn

  für beliebige $x_1, x_2 \in A$ aus
  $f(x_1) = f(x_2)$ auch $x_1 = x_2$ folgt.

- **bijektiv** wenn f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.



Sei $f: A \longrightarrow B$ eine bijektive Abbildung

dann existiert eine Abbildung $f^{-1}: B \longrightarrow A$

$$f^{-1}(b) := a \text{ mit } f(a) = b$$

Es gelten $f\left(f^{-1}(b)\right) = f(a) = b$

$$f^{-1}\left(f(a)\right) = f^{-1}(b) = a$$

__Satz__ gegeb. $f: A \longrightarrow B$ (Abbildung)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"', "\text{surj.}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \\
A/\sim \arrow[ur, "m"', "\text{injektiv}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{f = m \circ e}$$

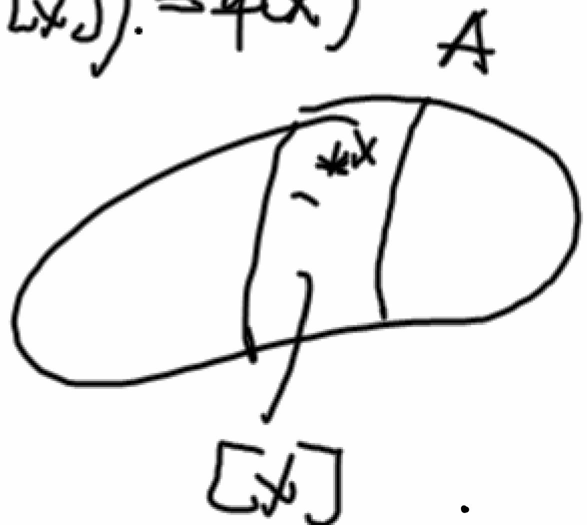
__Beweis__ $e: A \longrightarrow A/\sim$

$x \longmapsto e(x) = [x]$

$$A/\sim \; = \{ [x] ; \; x \in A \}$$

$x, y \in A \quad x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$$m: A/\sim \longrightarrow B$$
$$[x] \longmapsto m([x]) := f(x)$$



1) e ist surjektiv

Sei $[x] \in A/\sim$

$$x \longmapsto [x]$$

2) $$m: A/\sim \longrightarrow B$$
$$[x] \longmapsto \boxed{m([x]) = f(x)}$$ ist injektiv

z.zu: $[x] = [y] \Rightarrow m([x]) = m([y])$

es gilt $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow m([x]) = m([y])$

$$m([x]) = m([y]) \Rightarrow [x] = [y]$$

n. Def. $\Updownarrow$ $\quad\quad\quad\quad \Uparrow$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$$

3) $m(e(x)) = m[x] = f(x)$

$\Rightarrow f = m \circ e$ $\square$

Homomorphiesatz für Abbildungen

Satz Sei f: A → B eine Funktion, und

$$a \sim a' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$$

die durch f erzeugte Äquivalenzrelation. Dann gelten:

1)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ \mathbf{A/\sim} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

definiert eine kanische Faktorisierung f= e*m mit e: A → A/~ surjektiv und m: A/~ → B injektiv.

2) m: A/~ → f(A) ist bijektiv, d.h

$$A/\sim \; \approx \; f(A)$$