Relation $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

<u>Spezialfall</u> Binäre Relationen $R \subseteq A \times B$

Def. $R \subseteq A \times B$ <u>rechtseindeutig</u> $\Longleftrightarrow$

$$\forall_{a \in A} \quad (a, b_1), (a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2$$

Schreibw. $f \subseteq A \times B$ rechtseind.

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \longrightarrow f(a) = b \quad ((a,b) \in f)$$

1) f <u>surjektiv</u> $\Longleftrightarrow \forall_{b \in B} \exists_{a \in A} \quad f(a) = b$

2) f <u>injektiv</u> $\Longleftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

3) f <u>bijektiv</u> $\Longleftrightarrow f$ injektiv + surjektiv *)

Sei f bijektiv, dann ex. die sogen. Umkehrabb. f^{-1}

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$
$$b \longrightarrow f^{-1}(b) = a \quad (f(a) = b)$$

3') f <u>bijektiv</u> $\Longleftrightarrow \forall_{b \in B} \exists!_{x \in A} \quad f(x) = b$

$\exists!_{x \in A} \equiv$ es existiert genau ein $x \in A$

Definition geg $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

Die Komposition (Verknüpfung) von g und f ist definiert wie folgt $g \circ f : A \longrightarrow C$

$$g \circ f(a) := g(f(a))$$

Beispiel Sei f bijektiv. Dann gilt

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

$$f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a \Rightarrow$$

$$f^{-1} \circ f = id_A \text{ (Identität auf } A)$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f \circ f^{-1}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = b$$

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = id_B \text{ (Identität auf } B)$$

Def. geg Mengen A, B

$A \cong B$ (A isomorphen B) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ es ex bijektive Abb. $f : A \longrightarrow B$

Def. $f: A \longrightarrow B$ Abbildung.

<u>Bild von</u> $f \equiv f(A) \equiv Bi(f)$

$$f(A) := \{ f(a) \,;\, a \in A \}$$

---

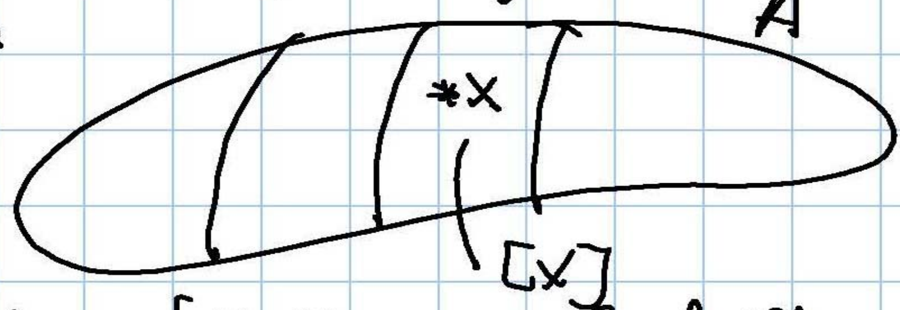
geg. $f: A \longrightarrow B$

$$a \, R_f \, a' \equiv a \sim a' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(a) = f(a')$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf A

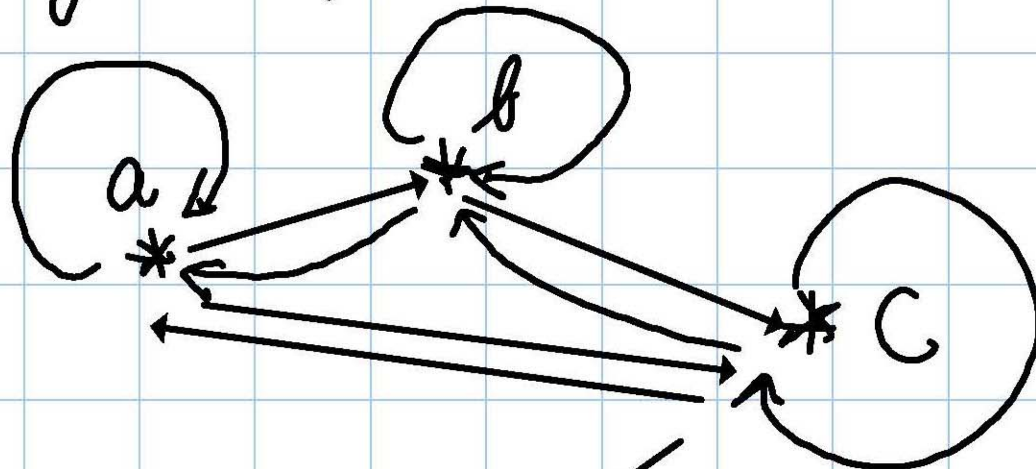
<u>Äquivalenzklasse</u> $[x] := \{ a \in A \,;\, a \sim x \}$

$x \in A$

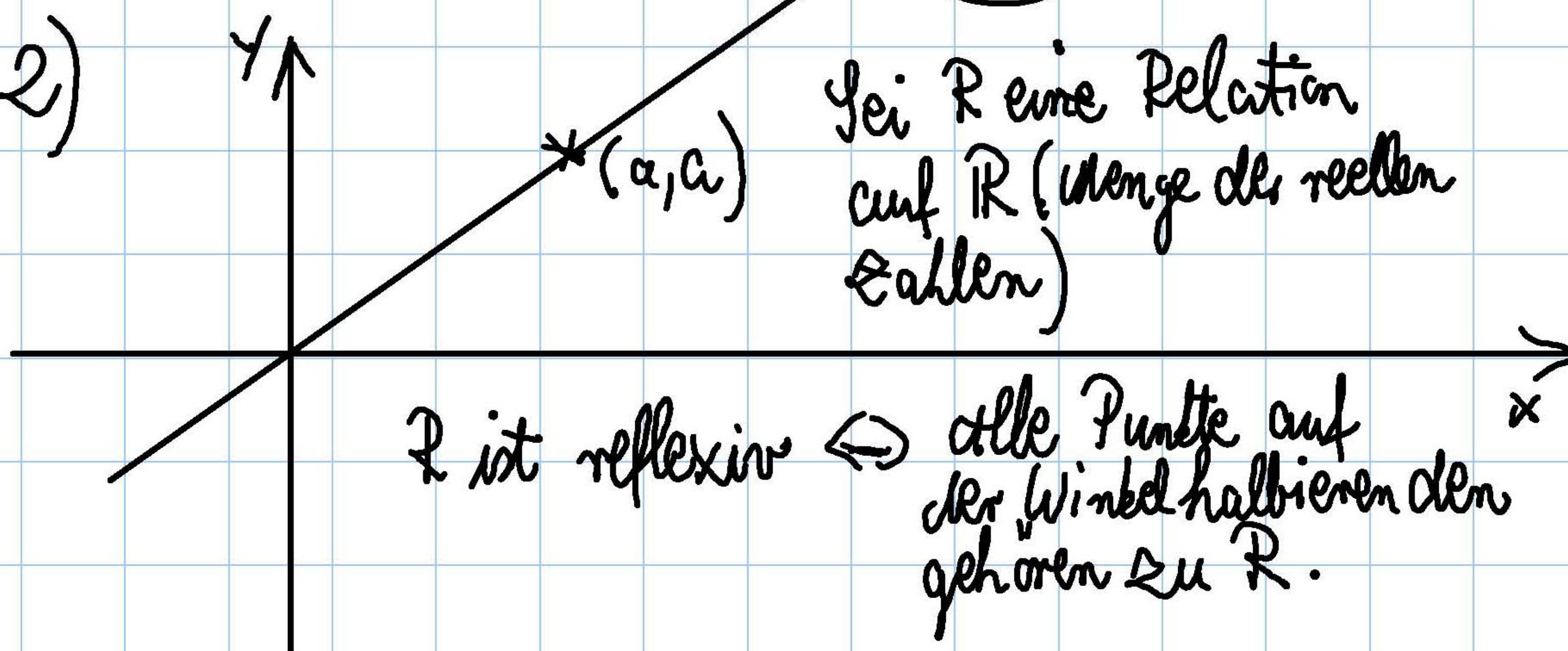


$A/R_f = A/\sim := \{ [x] \,;\, x \in A \}$ heißt <u>Quotientenraum</u> bzgl. der Äquivalenzrel. $\sim$

Bemerkung 1) $(a,b) \in R \iff a \longrightarrow b$



2)



Sei R eine Relation auf $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen)

R ist reflexiv $\iff$ alle Punkte auf der Winkelhalbierenden gehören zu R.

Satz (Homomorphiesatz für Abbildungen)

geg. Abb. $f: A \longrightarrow B$.

Dann gelten

1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"', "\text{surj}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \\ A/\sim \arrow[ur, "m \text{ injektiv}"'] & \end{tikzcd}$$

$$m \circ e = f \text{ mit}$$
$$e(x) := [x] \quad (x \in A) \text{ und}$$
$$m([x]) := f(x) \quad ([x] \in A/\sim)$$

2) $\boxed{A/\sim \;\cong\; f(A)}$

Beweis von 2)

$$m: A/\sim \longrightarrow B$$
$$[x] \longrightarrow f(x)$$

$$m: A/\sim \longrightarrow f(A) \subseteq B$$

ist injektiv u. surjektiv

$$b \in f(A) \Rightarrow \underset{x \in A}{\exists} \; f(x) = b$$

$$\Rightarrow [x] \Rightarrow m[x] = f(x) = b. \square$$

1) Klassische Aussagenlogik

Zeichen w (wahr), f (falsch) } Wahrheitswerte

$X := \{w, f\}$

Def. <u>n-stellige Wahrheitsfunktion</u> φ ist eine Abbildung $\varphi : X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{-mal}} \longrightarrow X$

φ heißt <u>Junktor</u>

<u>Beispiele</u>

Negation $\neg : X \longrightarrow X$ "nicht"

$\neg(w) = f, \ \neg(f) = w$

Konjunktion $\wedge : X \times X \longrightarrow X$ "und"

$\wedge(w,w) = w \quad \wedge(w,f) = \wedge(f,w) = \wedge(f,f) = f.$

Adjunktion $\vee : X \times X \longrightarrow X$

$\vee(w,w) = \vee(w,f) = \vee(f,w) = w \quad \vee(f,f) = f.$

$\wedge$	w	f
w	w	f
f	f	f

Wahrheitstafel.

$\Rightarrow$	w	f
w	w	f
f	w	w

$\Leftrightarrow$	w	f
w	w	f
f	f	w

Schreibweise. $\wedge(w, f) = w \wedge f$

$\vee(w, w) = w \vee w$

geg. abzählbarer Vorrat von Aussagenvariablen und die Menge aller Junktoren

Aussagenv.: $V_1, V_2, V_3, \dots$

<u>Def</u> <u>Induktive Definition der Aussageform</u>

1) Jede Aussagenvariable ist eine Aussageform.
2) Ist φ ein n-stelliger Junktor und sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ Aussageformen, so ist auch $\varphi(A_1, \dots, A_n)$ eine Aussageform

$$\neg(A) \equiv \neg A$$

$$\wedge(A, B) \equiv A \wedge B$$

$$\vee(A, B) \equiv A \vee B$$

<u>Def.</u> Eine Belegung $\mathbb{B}$ der Aussagenvariablen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{B}: \{V_1, V_2, \ldots, V_n\} \longrightarrow \{w, f\} = X$$

$$V_i \longrightarrow \mathbb{B}(V_i)$$