Aussagenlogik

$$X := \{w, f\} = \{0, 1\}$$

Def. n-stellige Wahrheitsfkt ist eine Abbildung

$$f: X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-mal}} \longrightarrow X$$

Beispiel

Negation $\neg: X \longrightarrow X$

Konjunktion $\wedge: X \times X \longrightarrow X$

Adjunktion $\vee: X \times X \longrightarrow X$

$$f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definitions-} \\ \text{bereich}}}{A} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wertebereich}}}{B} \quad x \longrightarrow f(x)$$

Wertetabellen

$\rightarrow$	w	f
w	w	f
f	w	w

$\rightarrow: X \times X \longrightarrow X$

$A \Rightarrow B$

w f   w f

$\Leftrightarrow$	w	f
w	w	f
f	f	w

$\Leftrightarrow: X \times X \rightarrow X$

$A \Leftrightarrow B$

w f   w f

Indukt. Def. einer Aussageform

1) Jede Aussagenvariable ist eine Aussageform
   $V_1, V_2, V_3, \ldots$
2) Ist f ein n-stelliger Junktor und sind $A_1, \ldots, A_n$ Aussageformen, so ist auch $f(A_1, \ldots, A_n)$ eine Aussageform

Def. Eine Belegung $\mathbb{B}$ der Aussagenvariablen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{B}: \{V_1, \ldots, V_n\} \to \{w, f\}$$

Bemerkung

Sei A eine Menge
"Die Kardinalität von A ($|A| = \mathrm{card}(A)$) ist die Anzahl der Elemente von A."

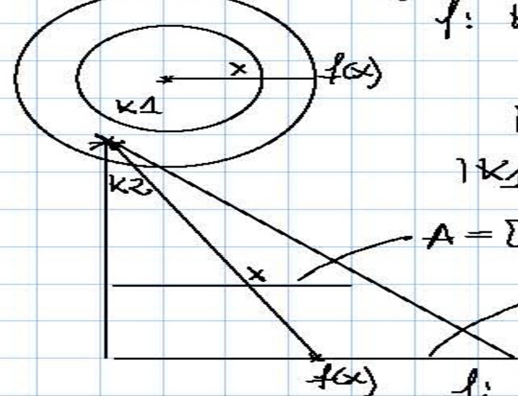
Def. A, B Mengen. A ist gleichmächtig zu B $:\Leftrightarrow$
Es gibt eine Bijektion $f: A \longrightarrow B$
Schreibweise $A \sim B$

Lemma Sei M eine Menge von Mengen. Dann ist die Relation $R := \{(A,B) \in M \times M ; A \sim B\}$ eine Äquivalenzrelation auf M.

Sei $A \in M$
Kardinalität von A: $|A|$ = "Gesamtheit" aller zu A gleichmächtigen Mengen.

Beispiele gleichmächtiger Mengen

1)



$f: K_1 \xrightarrow[\text{Bijektion}]{} K_2$

$K_1 \sim K_2$

$|K_1| = |K_2|$

2)

$A = [a, b]$

$B = [c, d]$

$f: A \xrightarrow{\text{Bijektion}} B$

$x \mapsto f(x)$

$|A| = |B|$

Satz 1) $\mathrm{Abb}(A,B) = \{ f: A \longrightarrow B;\ f \text{ Abbildung} \}$

$|\mathrm{Abb}(A,B)| = |B|^{|A|}$

2) $X = A_1 \times \dots \times A_n$

$|X| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$

Beisp. 1) $B: \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\{v_1, \dots, v_n\}} \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{B}}{\{w, f\}}$

$|\mathrm{Abb}(A,B)| =$ Anzahl der Belegungen der Variablen $v_1, \dots, v_n$

$= 2^n$

2) $g: \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-mal}} \longrightarrow X$ $\quad (X = \{w, f\})$

$X \times \dots \times X = X^n = A$, $\quad X = B$

$|\mathrm{Abb}(A,B)| = |\mathrm{Abb}(X^n, X)| = |B|^{|A|}$

$= |X|^{|X^n|}$

$|X^n| = \underbrace{|X| \cdot \dots \cdot |X|}_{n\text{-mal}} = |X|^n = 2^n$

$$\boxed{|\mathrm{Abb}(X^n, X)| = |X|^{|X^n|} = 2^{2^n}}$$

$$\mathbb{B}: \{v_1, \dots, v_n\} \longrightarrow \{w, f\} \, ?$$

Definition

Ist F eine Aussageform, in der höchstens die Aussagenvariablen $v_1, v_2, \dots, v_n$ auftreten, und ist $\mathbb{B}$ eine Belegung von $v_1, \dots, v_n$, so sei $\mathbb{B}(F)$ wie folgt induktiv definiert:

1) Ist $F = v_i$ $(1 \le i \le n)$. Dann ist $\mathbb{B}(v_i)$ bereits definiert

2) Sei $F = \varphi(A_1, \dots, A_n)$. Dann sei $\mathbb{B}(F)$ der Wahrheitswert, den der Junktor φ dem n-Tupel von Wahrheitswerten
$$(\mathbb{B}(A_1), \mathbb{B}(A_2), \dots, \mathbb{B}(A_n))$$
zuordnet.
$$\mathbb{B}(F) = \varphi(\mathbb{B}(A_1), \dots, \mathbb{B}(A_n))$$
für $F = \varphi(A_1, \dots, A_n)$

Beispiel $F = (v_1 \wedge v_2) \vee v_1$

i	$\mathbb{B}_i(v_1)$	$\mathbb{B}_i(v_2)$	$\mathbb{B}_i(v_1 \wedge v_2)$	$\mathbb{B}_i(F)$
1	w	w	w	w
2	w	f	f	w
3	f	w	f	f
4	f	f	f	f

Definition Sind A und B Aussageformen und treten in A und B insgesamt die Aussagevariablen $V_1, \dots, V_n$ auf, so heißen A und B äquivalent ($A \sim B$) genau dann, wenn

$$\underset{\substack{\text{Belegungen} \\ \mathbb{B} \text{ von } V_1, \dots, V_n}}{\forall} \quad \mathbb{B}(A) = \mathbb{B}(B).$$

Anmerkung: Auf der Menge der Aussageformen ist die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Beispiele

1) $A \wedge B \sim B \wedge A$; $A \vee B \sim B \vee A$

2) $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$

$(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$

3) $\neg\neg A \sim A$

4) de Morgansche Gesetze

$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

i	A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	
1	w	w	f	f	
2	f	f	w	w	
3	w	f	f	f	
4	f	w	f	f	
					⋮

<u>Def.</u> Eine Menge M von Junktoren ist <u>vollständig</u>

$\Leftrightarrow$ wenn es zu jeder Aussageform F

eine zu F äquivalente Aussageform gibt,

die nur die Junktoren aus M enthält

<u>Satz</u> <u>Die Menge der Junktoren</u> $\{\neg, \vee\}$

<u>ist vollständig</u>.

<u>Analog</u>

1) $\{\neg, \wedge\}$ vollständig

2 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ vollständig

...

<u>Beweis</u> Sei $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ eine Wahrheitsfunktion

<u>Fallunterscheidung</u>

1) Sei φ eine Wahrheitsfunktion mit

$\mathbb{B}(\varphi(v_1, \ldots, v_n)) = f$ für alle Belegungen von $v_1, \ldots, v_n$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(v_1, \ldots, v_n) \sim \neg(v_1 \vee \neg v_1)}$$

<u>Bemerkung</u> $\neg(v_1 \vee \neg v_1) = \neg v_1 \wedge \neg\neg v_1 = \neg v_1 \wedge v_1$

2) Sei $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ eine Wahrheitsfkt mit

$\mathbb{B}\,\varphi(v_1, \ldots, v_n) = w$ für wenigstens eine Belegung $\mathbb{B}$.

Es gibt 2^n Beleg. $\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_{2^n} : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \{w, f\}$

Sei $A_{ij} := \begin{cases} v_j & \mathbb{B}_i(v_j) = f. \\ \neg v_j & \mathbb{B}_i(v_j) = w \end{cases}$

i-te Beleg. j-te Variable.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{B}_i(A_{ij}) = f \text{ für } j = 1, \ldots, n}$$

<u>Begründung</u>

Nach Def. gilt: Ist $A_{ij} = v_j \Rightarrow \mathbb{B}_i(v_j) = f$.

Ist $A_{ij} = \neg v_j \Rightarrow \mathbb{B}_i(v_j) = w \Rightarrow \mathbb{B}(\neg v_j) = \neg\mathbb{B}(v_j) = f$

Sei $C_i := A_{i1} \vee \dots \vee A_{in} \Rightarrow$

$$\mathbb{B}_i(C_i) = \mathbb{B}_i(A_{i1}) \vee \dots \vee \mathbb{B}_i(A_{in}) = f.$$

Sei nun $\boxed{C := \neg C_{i_1} \vee \dots \vee \neg C_{i_m}}$.

wobei $i_1, \dots, i_m$ die Nummern derjenigen Belegungen $\mathbb{B}_i$ von $v_1, \dots, v_n$ sind, für die gilt $\mathbb{B}_i(\varphi(v_1, \dots, v_n)) = w$

<u>Behpt.</u> $\boxed{\varphi(v_1, \dots, v_n) \sim C}$

(i) $\mathbb{B}_i(\varphi(v_1, \dots, v_n)) = w \Rightarrow \mathbb{B}_i(C) = w$

Sei $\mathbb{B}_i$ eine Belegung mit $\mathbb{B}_i(\varphi(v_1, \dots, v_n)) = w$. Dann gilt

$$i \in \{i_1, \dots, i_m\}.$$

Sei o.E.d.A. $i = i_k$. Nun gilt allgemein

$$\mathbb{B}_i(C) = w \Leftrightarrow \mathbb{B}_i(\neg C_{i_1} \vee \dots \vee \neg C_{i_m}) = w$$

$$\mathbb{B}_i(\neg C_{i_1}) \vee \dots \vee \mathbb{B}_i(\neg C_{i_m}) = w$$

$$\Leftrightarrow \exists_{i_k} \mathbb{B}_i(\neg C_{i_k}) = w \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{i_k} \mathbb{B}_i(C_{i_k}) = f.$$

Mit $i = i_k$ gilt $\mathbb{B}_{i_k}(C_{i_k}) = f \Rightarrow \mathbb{B}_{i_k}(C) = w$

Analog gilt die Umkehrung.

(ii) $\mathbb{B}_i(C) = w \Rightarrow \mathbb{B}_i \varphi(v_1, \dots, v_n) = w$

Aus (i) und (ii) folgt $\varphi(v_1, \dots, v_n) \sim C$ $\square$