$X = \{w, f\}$ $\quad f: X^n \longrightarrow X$

<u>Def.</u> Sei M eine Menge von Junktoren.
M ist <u>vollständig</u> wenn es zu jeder Aussageform F eine zu F äquivalente Aussageform die nur die Junktoren aus M enthält

<u>Satz</u> $M = \{\neg, \vee\}$ vollständig

Analog $M = \{\neg, \wedge\}$ vollständig

$M = \{\neg, \wedge, \vee\}$ "

F, G Aussageformen mit den Variablen $v_1, \ldots, v_n$

F ist äquivalent zu G $\Leftrightarrow \underset{\substack{\text{Beleg. } \mathbb{B} \\ \text{von } v_1, \ldots, v_n}}{\forall} \mathbb{B}(F) = \mathbb{B}(G)$

<u>Bemerkung.</u> <u>Sheffersche Strich</u>

$/ : X \times X \longrightarrow X$

/	w	f
w	f	w
f	w	w

$w / w = f.$

$f / w = w / f = f / f = w$

<u>Satz</u> Sei / der Sheffersche Strich. Dann ist $\{/\}$ eine vollständige Menge von Junktoren.

Beweis

$\neg A \sim A / A$

$A \vee B \sim (A/A) / (B/B)$

$A \wedge B \sim (A/B) / (A/B)$ $\square$

Def. 1) <u>Adjunktive Normalform</u>

$$C = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_m$$

$$C_i = A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \dots \wedge A_{i_n}$$

mit $A_{i_k} := \begin{cases} V_k \\ \neg V_k \end{cases}$

2) <u>Konjunktive Normalform</u>

$$C = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

$$C_i = A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \dots \vee A_{i_n}$$

$$A_{i_k} := \begin{cases} V_k \\ \neg V_k \end{cases}$$

Satz Jede Aussageform ist äquivalent zu einer adjunktiven (oder konjunktiven) Normalform.

Def. Eine Aussageform F heißt

1) **allgemeingültig** $\Longleftrightarrow \underset{\mathbb{B} \text{ der Variablen in } F}{\forall} \quad \mathbb{B}(F) = w$

2) **erfüllbar** $\Longleftrightarrow \underset{\mathbb{B} \text{ der Variablen in } F}{\exists} \quad \mathbb{B}(F) = w$

3) **unerfüllbar** $\Longleftrightarrow \underset{\mathbb{B} \text{ der Variablen in } F}{\forall} \quad \mathbb{B}(F) = f$

Beispiele

1) $F_1 :\equiv V \wedge \neg V$ unerfüllbar

2) $F_2 :\equiv V \vee \neg V$ allgemeingültig

3) $F_3 :\equiv V$ erfüllbar.

4) $A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$	w	f
w	w	f
f	w	w

$A \Leftrightarrow B$

$\Leftrightarrow$	w	f
w	w	f
f	f	w

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

4a) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

$$\mathbb{B}(\neg B \Rightarrow \neg A) = w \Rightarrow$$

$$\mathbb{B}(A \Rightarrow B) = w$$

(4b) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \wedge \neg B \Rightarrow R \wedge \neg R$

Bemerkung Wir sagen vorläufig, ein Begriff heiße entscheidbar auf einer Menge M, wenn es ein allgemeines Verfahren gibt, durch das für ein beliebig vorgegebenes Element der Menge M prinzipiell festgestellt werden kann, ob der Begriff auf es zutrifft oder nicht.

In diesem Sinne sind die bisher eingeführten Begriffe entscheidbar.

§2 Ein formales System der klassischen Aussagenlogik

Def. Ein formales System besteht allgemein aus 4 Teilen

1) Angabe der Grundzeichen des Systems ("Das Alphabet der verwendeten Sprache")
2) Gewisse Zeichenreihen werden als Formeln definiert ("Festlegen der sinnvollen Ausdrücke")
3) Gewisse Formeln werden als Axiome ausgezeichnet.
4) Für gewisse Formelschemata $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ werden Grundschlußregeln

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$$

angegeben.

Formales System der klassischen Aussagenlogik

1) Die <u>Grundzeichen</u> unseres Systems sind:

   (i) Aussagenvariablen.

   (ii) Die Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$

   (iii) Runde Klammern

2) Induktive Definition der <u>Formeln</u>

   (i) Jede Aussagenvariable ist eine Formel.

   (ii) Ist A eine Formel, so ist auch $\neg A$ eine Formel

   (iii) Sind A und B Formeln, so sind auch $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ Formeln.

Def. der Positiv- u. Negativteile einer Formel F

R1) F ist ein Positivteil von F

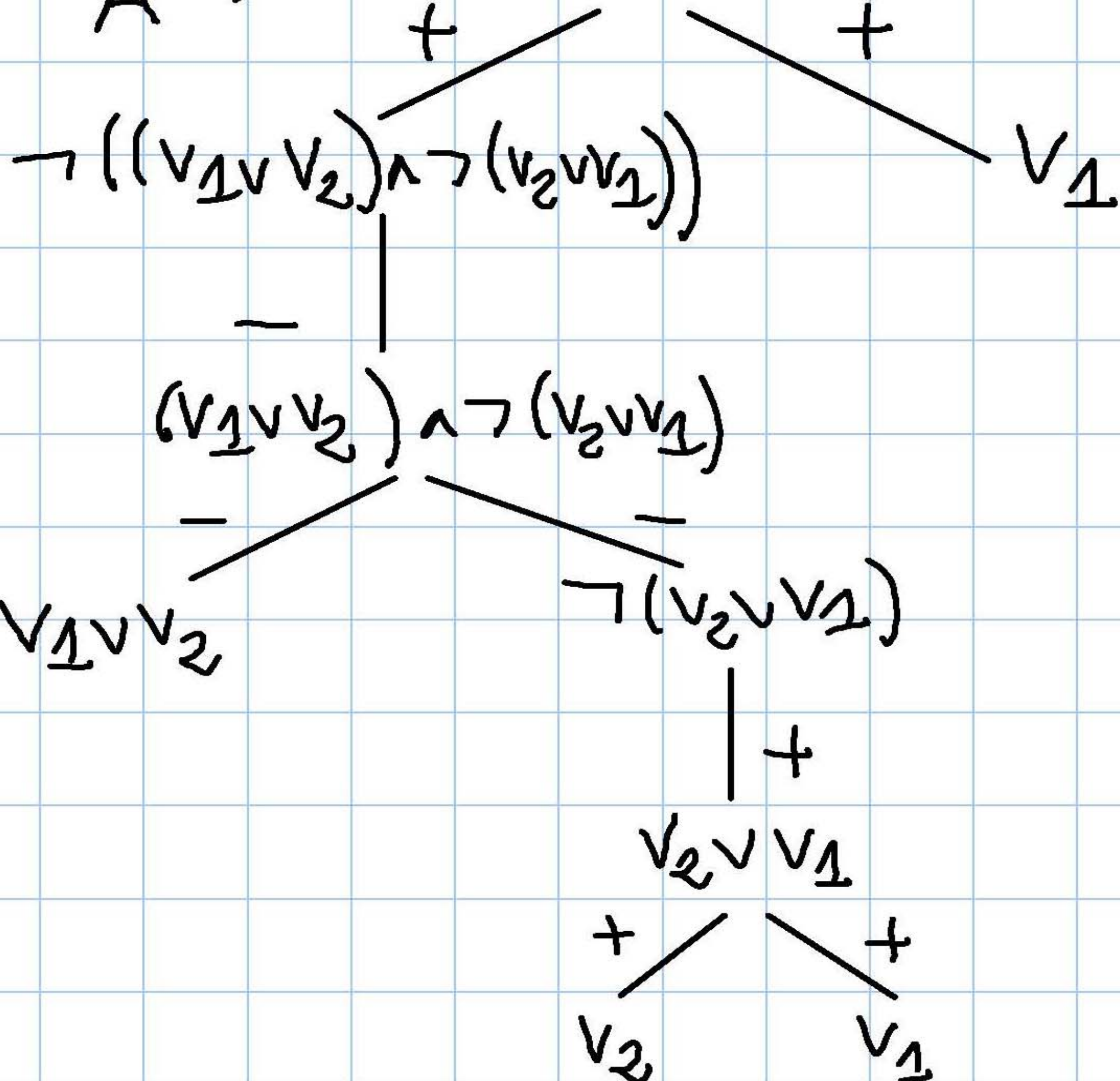
R2) Ist $\neg A$ ein Positivteil, so ist A ein Negativteil

R3) Ist $\neg A$ ein Negativteil, so ist A ein Positivteil

R4) Ist $(A \vee B)$ ein Positivteil, so sind A und B Positivteile von F

R5) Ist $(A \wedge B)$ ein Negativteil von F, so sind A und B Negativteile von F

Beispiel $F :\equiv \underbrace{\neg((v_1 \vee v_2) \wedge \neg(v_2 \vee v_1))}_{A} \vee \underbrace{v_1}_{B}$



Def. 1) Positiv- oder Negativteile A einer Formel heißen <u>minimal</u> $\Leftrightarrow$ A ist nicht weiter in Positiv/Negativteile zerlegbar.

2) Eine Formel heißt <u>einfach</u>, wenn jeder Minimalteil von F eine Aussagenvariable ist.

<u>Satz</u> Bei jeder Belegung einer Formel F, bei der mindestens ein Positivteil von F den Wert w oder mindestens ein Negativteil von F den Wert f, erhält F den Wert w.