Def. Indukt. Def. der Positiv- u. Negativteile einer Formel F

R1) F ist Positivteil.

R2) $\neg A$ Positivteil $\Rightarrow$ A Negativteil von F

R3) $\neg A$ Negativt. $\Rightarrow$ A Positivteil von F

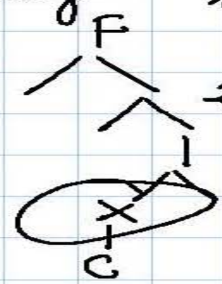
R4) $(A \vee B)$ Positivteil $\Rightarrow$ A, B Positivteile

R5) $(A \wedge B)$ Negativteil $\Rightarrow$ A, B Negativteile von F

Satz Bei jeder Belegung einer Formel F, bei der mindestens ein Negativteil von F den Wert f oder mindestens ein Positivteil den Wert w hat, erhält F den Wert w.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Belegung von F u. C ein beliebiger Positiv oder Negativteil von F mit $\mathfrak{B}(C) = w$ oder $\mathfrak{B}(C) = f$.

Bemerkung.



1) Induktionsanfang $C = F$

$\mathfrak{B}(C) = w,\ C_+ \Rightarrow \mathfrak{B}(F) = w$

2) Induktionsannahme

Die Behauptung des Satzes möge auf alle diejenigen Bestandteile von F zutreffen, die schon als Positiv- oder Negativteile von F nachgewiesen sein müssen, bevor sich C nach einer der Regeln R2 – R5 als Positiv- oder Negativteil ergibt.

3) Induktionsschritt $(X \rightarrow C)$

3-R2 C sei Negativteil nach R2; dann ist $\neg C$ Positivteil und es gilt

$$\mathfrak{B}(\neg C) = \neg \mathfrak{B}(C) = w$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}(F) = w$$

Induktionsann.

3-R3 C Positivteil u. $\mathbb{B}(C)=w \Rightarrow$

$\neg C$ Negativteil $\Rightarrow \mathbb{B}(\neg C) = \neg \mathbb{B}(C) = f.$

$\Rightarrow \mathbb{B}(F) = w$

3-R4 Sei C Positivteil nach R4

$\Rightarrow C \vee C'$ Positivteil von $F \Rightarrow$

$\mathbb{B}(C \vee C') = \mathbb{B}(C) \vee \mathbb{B}(C') = w \vee \mathbb{B}(C')$

$= w$

$\Rightarrow \mathbb{B}(F) = w$

3-R5 Sei C Negativteil nach R5 d.h

$C \wedge C'$ Negativteil $\Rightarrow$

$\mathbb{B}(C \wedge C') = \mathbb{B}(C) \wedge \mathbb{B}(C') = f$

$X = C \wedge C'$ Negativteil u. $\mathbb{B}(X) = f$

$\Rightarrow$ $\mathbb{B}(F) = w$ II.

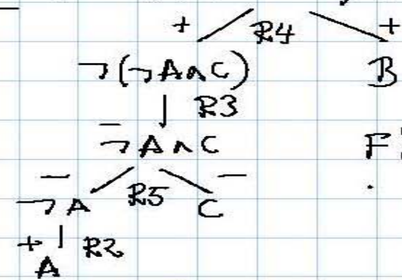
Induktionsann.

Satz Hat bei einer Belegung $\mathbb{B}$ der Formel F jeder minimale Positivteil von F den Wert f. und jeder minimale Negativteil von F den Wert w, so hat jeder Positivteil von F den Wert f und jeder Negativteil von F den Wert w (Insbesondere gilt $\mathbb{B}(F) = f$).

Verabredung zur Mitteilung

Die Formelschemata $F[A_+]$ oder $F[A_-]$ seien Mitteilungszeichen für eine Formel, in der an einer bestimmten Stelle die durch A mitgeteilte Formel als Positiv- bzw. Negativteil auftritt.

Beispiel $F = \neg(\neg A \wedge C) \vee B$



$F[A_+]$

$F[B_+]$ oder $F[B_-]$ bezeichne dann diejenige Formel, die aus $F[A_+]$ bzw. $F[A_-]$ entsteht, wenn der Positiv- bzw. Negativteil A an der betreffenden Stelle durch die Formel B ersetzt wird.

$$F[A_+] \Rightarrow F[C_+]$$

$$F[A_+] = F = \neg(\neg A \wedge C) \vee B \Longrightarrow$$

$$F[C_+] = \neg(\neg C \wedge C) \vee B$$

Satz Sei v eine Aussagenvariable

$$F = F[v_+, v_-] \Longrightarrow \mathbb{B}(F) = w$$

für jede Belegung $\mathbb{B}$ von F d.h.

F ist allgemeingültig

$F[A_+, B_+]$, $F[A_+, B_-]$ bezeichnen Formeln mit getrennten Positiv (Positiv- u. Negativ) Teilen A und B, die in F an zwei bestimmten Stellen <u>ohne Überschneidungen</u> auftreten.

Def. Eine Formel heißt einfach, wenn alle minimalen Positiv u. Negativteile von F Aussagenvariable sind.

<u>Satz</u> Eine einfache Formel ist allgemeingültig wenn sie die Gestalt $F[V_+, V_-]$ hat.

Satz a) $F[(A \wedge B)_+]$ allgemeingültig $\Longleftrightarrow$
$F[A_+]$ u. $F[B_+]$ allgemeingültig sind.

b) $F[(A \vee B)_-]$ allgemeingültig $\Longleftrightarrow$
$F[A_-]$ und $F[B_-]$ allgemeingültig

Def **Axiome** seien alle Formeln der Gestalt
$$F[V_+, V_-]$$

Grundschlußregeln

S1 $\quad F[A_+], F[B_+] \Longrightarrow F[(A \wedge B)_+]$

S2 $\quad F[A_-], F[B_-] \Longrightarrow F[(A \vee B)_-]$

Induktive Def. der Herleitbarkeit

1) Jedes Axiom ist herleitbar
2) Sind die Prämissen eines Grundschlusses herleitbar $\Longrightarrow$ Konklusion herleitbar.

Satz Eine Formel F ist allgemeingültig $\Longleftrightarrow$
F ist herleitbar.

Beispiel $F :\equiv \neg(v_1 \vee (v_2 \wedge v_3)) \vee ((v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3))$

$+ \qquad +$

$\neg(v_1 \vee (v_2 \wedge v_3))$

$-$

Minimal. $v_1 \vee (v_2 \wedge v_3)$

$F[(v_1 \vee (v_2 \wedge v_3))_-]$

$F_1 = F[v_{1-}] \qquad F[(v_2 \wedge v_3)_-] = F_2$

$F_1 \equiv \neg v_1 \vee ((v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3))$

$F_2 \equiv \neg(v_2 \wedge v_3) \vee ((v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3))$

F_1

$+ \qquad +$

$\neg v_1 \qquad (v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3)$

F_2

$+ \qquad +$ Minimal

$\neg(v_2 \wedge v_3) \qquad (v_1 \vee v_2) \wedge (v_1 \vee v_3)$

S1 $F[A_+], F[B_+] \Rightarrow F[(A \wedge B)_+]$

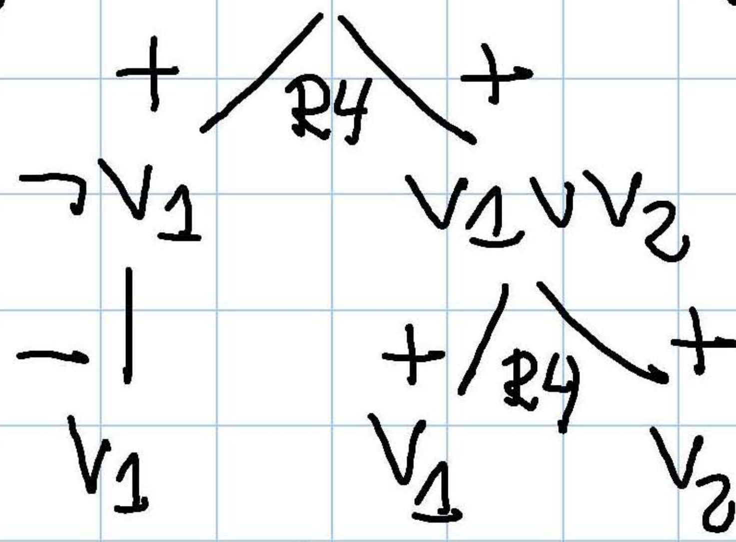
$F_3 = \neg v_1 \vee (v_1 \vee v_2)$

$F_4 = \neg v_1 \vee (v_1 \vee v_3)$

Aus F_2 $\quad F_5 = \neg(v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \vee v_2)$

$F_6 = \neg(v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \vee v_3)$

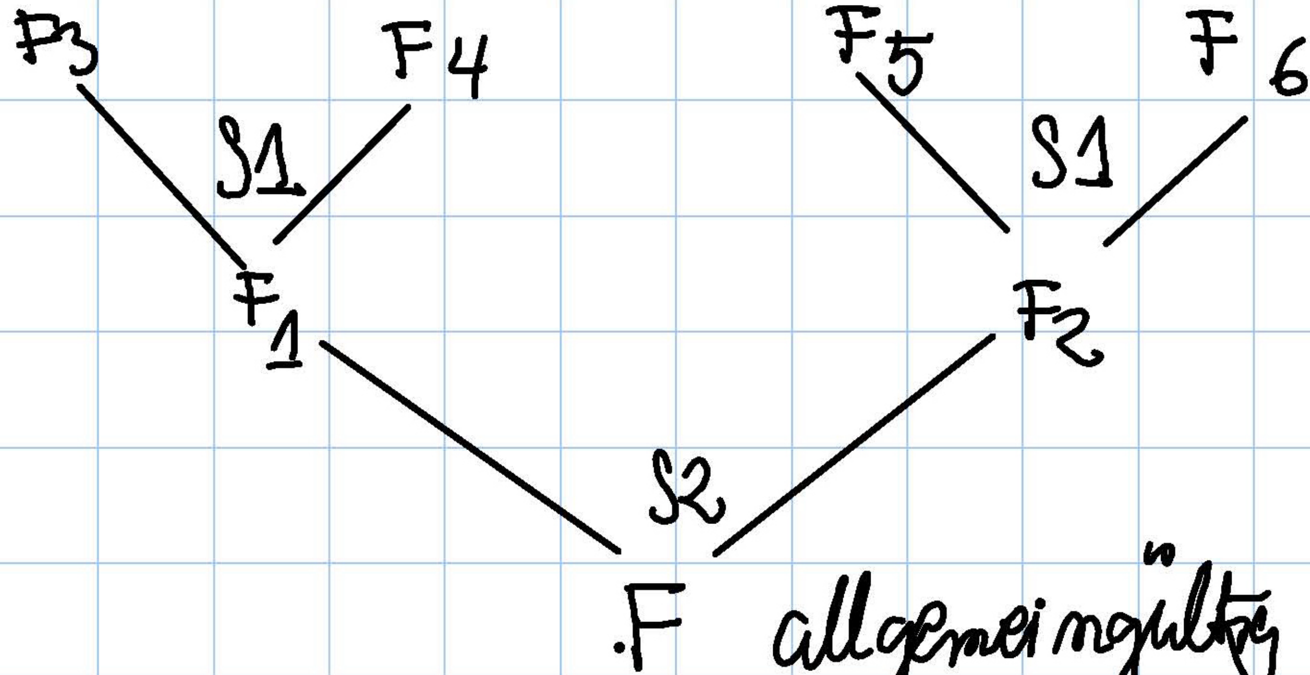
$$F_3 = \neg v_1 \vee (v_1 \vee v_2)$$



$$F_3 = F_3[v_1+, v_2-]$$

$\Rightarrow$ F_3 ist Axiom

Analog F_4, F_5, F_6



allgemeingültig

F ist also herleitbar und somit allgemeingültig.